

Theorie der Waaguhren des frühen Mittelalters (Foliot- Uhren)

von

Dieter Röß 5.12.2016

Gliederung

- 1 Ausgangspunkt: Waaguhrhemmung und Pendel**
- 2 Ableitung der Differentialgleichung aus dem Energiesatz**
 - ✦ 2.1 Reibungsfreier Fall
 - ✦ 2.2 Berücksichtigung der Reibung einer Hemmung
 - ✦ 2.3 Ideales Pendel
- 3 Geometrie der Waaghemmung**
 - ✦ 3.1 Spindel und Kronrad
 - ✦ 3.2 Modellierung von Reibung (und Fall)
- 4 Vollständige Differentialgleichung der Waaghemmung**
- 5 Simulation der Waaghemmung**
 - ✦ 5.1 Methode
 - ✦ 5.2 Hauptfenster *Schwingung der Waaguhr*
 - ✦ 5.3 Fenster *Spitzenwerte*
 - ✦ 5.4 Fenster *Phasenraumkurven*
 - ✦ 5.5 Fenster *Waaguhr- Hemmung*
 - ✦ 5.6 Fenster *Reibung*
- 6 Beispielhafte Ergebnisse der Simulationsrechnung**
 - ✦ 6.1 Einschwingen ohne Reibung
 - ✦ 6.2 Anschwingen der Waag mit Reibung
 - ✦ 6.3 Vergleich mit Sinus-Schwingung
 - ✦ 6.4 Einfluss des Antriebs
 - ✦ 6.5 Reibung und Temperaturabhängigkeit
 - ✦ 6.6 Extreme Einstellungen
- 7 Simulationen für $\gamma = 90$ Grad**
 - ✦ 7.1 Einfluss des Antriebsgewichts G
 - ✦ 7.2 Einfluss des Antriebs A
 - ✦ 7.3 Einfluss der Eingriffstiefe d/L

Finis

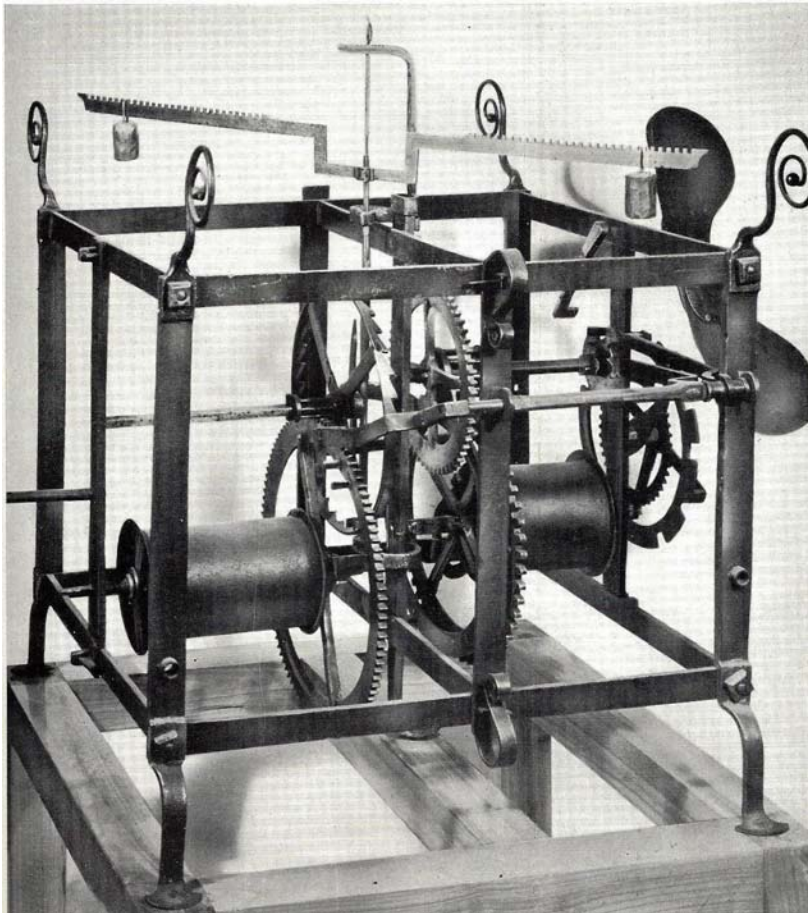
Addendum: aktuelles Messergebnis am Waaguhr- Neubau

Theorie der Waaguhren des frühen Mittelalters (Foliot- Uhren)

Dieter Röß¹

1 Ausgangspunkt: Waaguhrhemmung und Pendel

Waaguhren (engl. *verge and foliot*) wurden etwa seit der Mitte des 13. Jahrhunderts bis zur Einführung von Pendeluhren im 17. Jahrhundert als große Turmuhren und in kleiner Bauweise auch als Zimmeruhren verwendet.



Das erste Bild² zeigt eine rekonstruierte Turmuhr aus dem Ende des 15. Jahrhunderts.

Charakteristisch für Turmuhren mit Waag ist, dass das sich einmal in der Stunde drehende Bodenrad das Kronrad direkt antreibt, was Schwingungsperioden der großen Waag mit ihren Regulierungsgewichten von 5 bis 10 Sekunden bedingt.

Bei Kleinuhren wurde ein weiteres Getrieberad zwischen Bodenrad und Kronrad eingefügt, so dass die entsprechend kleiner dimensionierte Waag Schwingungsperioden von etwa 1 Sekunde vollführt.

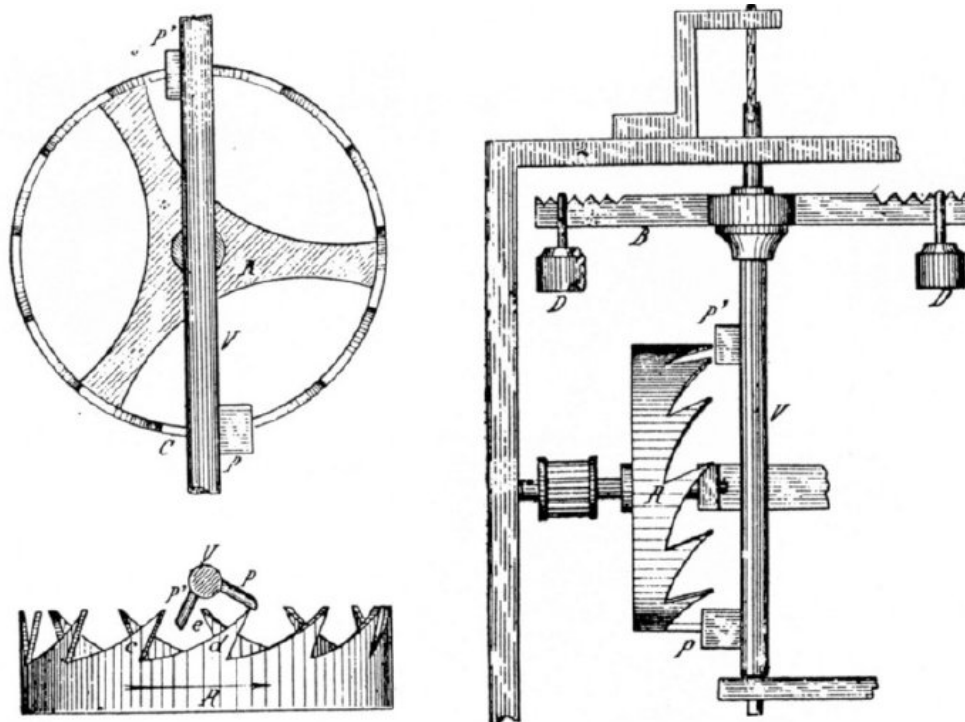
Das zweite Bild³ zeigt die Grundkonstruktion der Waaguhr in Aufsicht und Seitenansicht. Die Spindel

mit ihren etwa um 90 Grad versetzten Lappen greift auf entgegengesetzten Seiten des Kronrads in dessen Zähne ein und hindert es am Durchdrehen. Ein die Kronradachse antreibendes Gewicht übt Druck auf den gerade einen Zahn berührenden Lappen aus und beschleunigt die Drehung der Waag, bis sie beim Auftreffen eines entgegengesetzten Zahns auf den ihr entsprechenden Lappen wieder abgebremst wird und zurückschwingt. Für die Funktion dieser Hemmung ist wesentlich, dass das Kronrad eine ungerade Zahl von Zähnen hat und dass dadurch der Mittelpunkt einer Schwingung abwechselnd rechts und links von der Symmetrieachse der Spindel liegt.

¹ <http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~roess/index.htm> ,
https://de.wikipedia.org/wiki/Dieter_R%C3%B6%C3%9F

² Antonio Simoni *Orologi*, Vallardi Editore, Milano 1074, Seite 75

³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Foliot>



Kaum eine der großen Waag- Turmuhren blieb im Originalzustand erhalten, da der Umbau auf eine Pendeluhr technisch einfach war und einen merklichen Gewinn an Genauigkeit brachte. Es gibt keine belastbaren historischen Zeugnisse über die Funktionsfähigkeit der ursprünglichen Waaguhren– außer dem auf unklarer Quelle beruhenden Ruf sehr ungenau gewesen zu sein, mit täglichen Abweichungen von der Sonnenzeit von 15 Minuten. Oft wird dieser Hemmung die Eigenheit eines Oszillators überhaupt abgesprochen.

An einem Neubau mit moderner Messmethodik für Zeit und Temperatur zeigte der Autor⁴, dass die Waaghemmung eine sehr hohe intrinsische Wiederholgenauigkeit hat, mit stündlichen Abweichungen von wenigen Sekunden. Die Langzeit- Genauigkeit wurde im Experiment durch die Temperaturabhängigkeit der Oszillation begrenzt, die für das untersuchte Muster bei etwa 1 Minute pro Tag und Grad lag.

Eine Theorie dieser Hemmung liegt nicht vor. Sie wird im Folgenden entwickelt. Ausgangspunkt ist der Satz von der Erhaltung der Energie in einem abgeschlossenen System. Daraus wird die Differentialgleichung zweiten Grades für die Schwingung abgeleitet. Sie ist nichtlinear und daher nicht allgemein analytisch lösbar. Daher wurde eine numerische Lösung nach der Methode *Runge-Kutta*⁴ programmiert, die für beliebige Werte der Einstellparameter den Zeitablauf der Schwingung, ihre Phasendiagramme und die Geometrie des Schwingungsablaufs berechnet und visualisiert. Die Simulation ist interaktiv, so dass der Benutzer die Einstellparameter verändern und auf seinem Rechner mit dem Modell experimentieren kann.

Eine besondere Bedeutung kommt bei der Spindelhemmung der Reibung zwischen Spindellappen und Kronradzähnen zu. Daher wird in das Rechenprogramm ein Modell der winkelabhängigen Reibung einbezogen.

Die Ableitung der Schwingungsgleichung ist so gewählt, dass in analoger Weise auch das Schwingungsverhalten eines freien Pendels mit großem Ausschlag und eines an einen Gewichtsantrieb gekoppelten Pendels behandelt werden kann.

⁴ <http://www.physik.uni-wuerzburg.de/NichtSoWichtiges.zip>

Zum Anschluss an Bekanntes wird zuerst das freie Pendel behandelt. Sein Modell sei kurz vorweg beschrieben.

Beim idealisierten mathematischen Pendel (punktförmige Pendelscheibe und gewichtsloser, starrer Pendelstab) ist die potentielle Energie die der bei ihre Schwingung gegen das Schwerfeld auf- und absteigende Pendelscheibe selbst; sie hat ein Maximum im Umkehrpunkt (Moment des größten Ausschlags), während die Bewegung momentan zur Ruhr kommt. Die Bewegungsenergie (Rotationsenergie) ist die der mit dem Pendelstab auf eine Kreisbahn gezwungene Pendelscheibe; sie ist im Umkehrpunkt gleich Null und hat ihr Maximum am tiefsten Punkt der Pendelbahn, wo die potentielle Energie gleich Null ist. Die Gesamtenergie wird laufend zwischen potentieller Energie und Bewegungsenergie der Pendelscheibe ausgetauscht.

Bei der Waaghemmung ist die Situation nicht grundlegend anders. Die potentielle Energie ist hier die des wegen der Zahnradübersetzung kaum sichtbar vertikal auf- und absteigenden Antriebsgewichts, die Bewegungsenergie ist im Wesentlichen⁵ die Rotationsenergie des horizontal schwingenden Waagarms. Der vertikale Weg des Gewichts ist über Zahnräder starr mit dem horizontalen Antrieb der Waag über das Kronrad und die Paletten der Waagspindel verbunden, so dass eine eindeutige Übersetzung zwischen beiden besteht.

In realen Schwingungssystemen wird Energie vernichtet, allgemein durch Reibung, bei der Spindelhemmung zusätzlich durch den hemmenden Impuls beim Zahnwechsel (*Fall*). Zum Aufrechterhalten der Schwingung muss daher laufend oder periodisch Energie zugeführt werden. Reibung und Fall werden in der theoretischen Ableitung und in der Simulation berücksichtigt.

Aus dem Energiesatz folgt für die Spindelhemmung der gleiche Typ von Differentialgleichung wie für das freie Pendel, mit dem Unterschied, dass beim freien Pendel die Verknüpfung zwischen potentieller Energie und Bewegungsenergie mit einem einzigen trigonometrischen Funktion beschrieben wird, während bei der Waaghemmung dafür mehrere Funktionen notwendig sind, die sich zeitlich im Verlauf einer Schwingungsperiode abwechseln.

Mit dieses vorweggenommenen Struktur der Ableitung ist bereits klar, dass die Waaghemmung im theoretischen Sinn ein dem Pendel vergleichbarer Oszillator ist.

⁵ Zu einem kleinen, hier vernachlässigbaren Teil trägt auch die Rotation der Getrieberäder zur Bewegungsenergie bei.

2 Ableitung der Differentialgleichung aus dem Energiesatz

2.1 Reibungsfreier Fall

Wir leiten zunächst die Schwingungsgleichungen ohne Energieverlust ab.

Potentielle und kinetische Energie (Rotationsenergie)

Potentielle Energie mgh

m Masse des vertikal bewegten Gewichts

g Erdbeschleunigung $9,81 \text{ m/sec}^2$

Rotationsenergie $\frac{J\omega^2}{2} = \frac{J}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2$

J Trägheitsmoment der rotierenden Masse

ω Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Masse

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

α Rotationswinkel

t Zeit

Energiesatz : Die Summe der Energien ist zeitlich konstant = C

$$mgh + \frac{J\omega^2}{2} = mgh + \frac{J}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = C$$

Differenzieren des Energiesatzes nach der Zeit t

$$mg \frac{dh}{dt} + J \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \rightarrow$$

$$mg \frac{dh}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + J \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0; \text{ Kürzen mit } \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - \frac{mg}{J} \frac{dh}{d\alpha}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}: \text{ Winkelbeschleunigung}$$

Diese Gleichung gilt für alle Systeme, bei denen ohne Reibung Energie zwischen potentieller Energie und Rotationsenergie ausgetauscht wird. Die maßgebende Größe ist $\frac{dh}{d\alpha}$, das Verhältnis zwischen einer Veränderung der Gewichtshöhe und der zugehörigen Veränderung des Ausschlagwinkels. Ist die Relation zwischen h und α bekannt, gewinnt man $\frac{dh}{d\alpha}$ durch Differenzieren.

2.2 Berücksichtigung der Reibung einer Hemmung

Um die Bedeutung der Reibung für die Dynamik einer Hemmung – allgemeiner einer Schwingung mit äußerem Antrieb - zu verstehen, fragen wir wohin eigentlich die Energie verschwindet, die innerhalb eines Zahnwechsels (einer Periode) dem schwingenden System zugeführt und anscheinend irgendwie verloren geht. Sie ist gleich dem potentiellen Energieunterschied des Antriebsgewichts bei seiner nichtperiodischen Absenkung innerhalb eines Zahnwechsels.

Sie wird offensichtlich nicht in Rotationsenergie umgesetzt, sonst müsste diese und damit die Schwingungsamplitude ständig zunehmen.

Tatsächlich wird dieser Energieanteil bei einer Hemmung im Wesentlichen durch Reibung im Getriebe in Wärme umgesetzt.

Dazu kommt ein geringer Anteil, der beim *Fall*, dem plötzlichen Auftreffen der Hemmungspalette auf den wechselnden Zahn, in akustische Energie und in Schwingungen des Uhraufbaus umgesetzt wird, wo sie letztlich auch zu Wärmeenergie wird.

Je nach dem Ausmaß der Reibung werden bei konstantem Antrieb die Rotationsenergie und damit der Winkelausschlag begrenzt. Im Gleichgewicht geht in einer Periode so viel Energie durch Reibung verloren wie durch die Absenkung des Gewichts über sein Auf- und Abpendeln bei Antrieb und Rückführung hinaus dazukommt.

Zur Berücksichtigung von Reibung ist es üblich in der Differentialgleichung zweiter Ordnung einen negativen Term erster Ordnung – also proportional zur ersten Ableitung, hier der Winkelgeschwindigkeit der Waag– einzuführen. Das ist plausibel weil Reibungsverluste im Allgemeinen mit der Geschwindigkeit zunehmen. R ist dabei ein charakteristischer, konstanter Reibungskoeffizient.

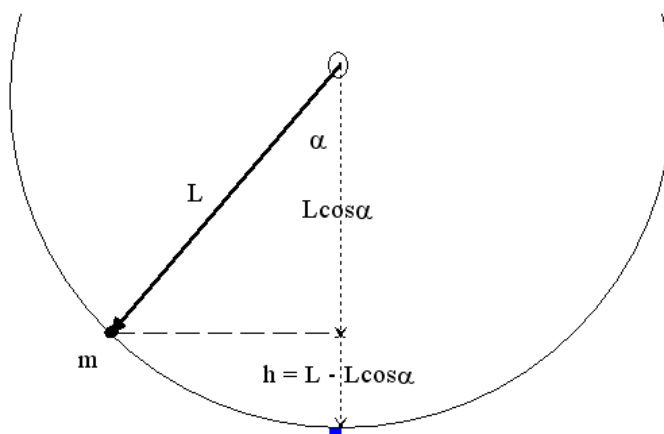
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mg}{J} \frac{dh}{d\alpha} - R \frac{d\alpha}{dt}$$

R : Reibungskoeffizient

Dieser einfache Ansatz führt für die Waaghemmung wie auch für das angetriebene Pendel zu einer bereits qualitativ plausiblen Lösung (Einschwingen auf reibungsabhängigen, endlichen Ausschlag, sinusähnlicher Zeitverlauf).

Wir können darüber hinaus den Reibungsverlauf der Waaghemmung in Abhängigkeit von der Spindelstellung gut modellieren (siehe weiter unten).

2.3 Ideales Pendel



Beim idealen Pendel gilt für die potentielle Energie

$$h = L(1 - \cos \alpha)$$

L Pendellänge

h Höhe über tiefstem Punkt

α Ausschlag, vom tiefsten Punkt

$$\frac{dh}{d\alpha} = L \sin \alpha$$

Für die Rotationsenergie gilt

$$J = mL^2 \rightarrow$$

m im Abstand L vom Rotationspunkt konzentrierte Pendelmasse

Damit folgt aus der allgemeinen Differentialgleichung die spezielle des idealen (reibungsfreien) Pendels:

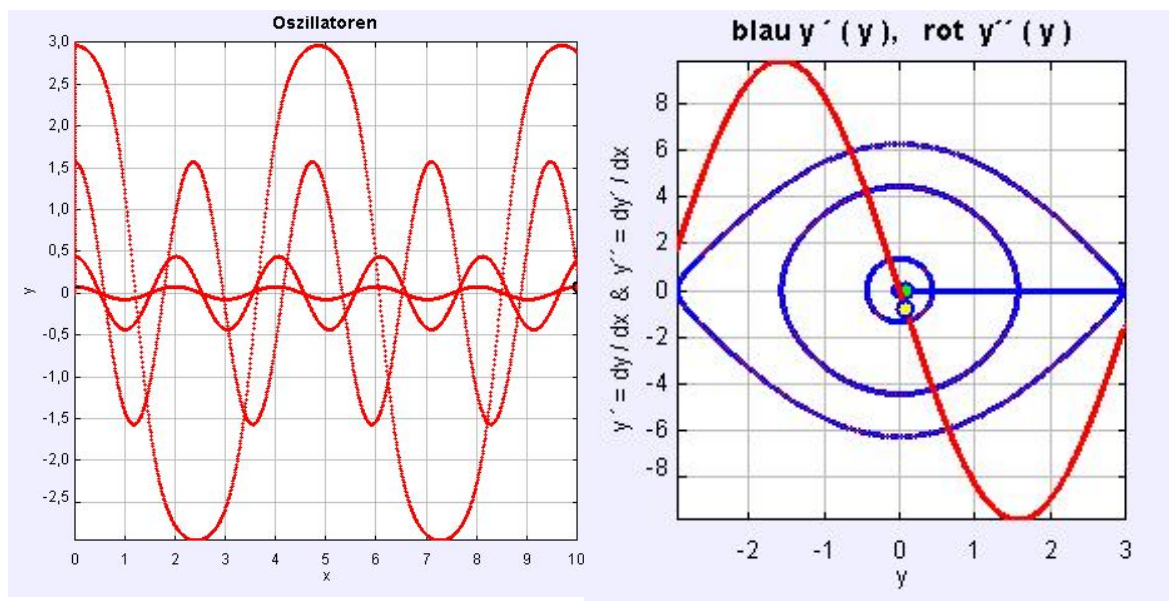
$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{mg}{J} \frac{dh}{da} = -\frac{mg}{mL^2} L \sin \alpha; \text{ Division durch } m \rightarrow$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \alpha$$

Die Schwingung des idealen Pendels ist unabhängig von seiner Masse.

Seine Differentialgleichung ist durch die trigonometrische Funktion $\sin \alpha$ nichtlinear. Die Schwingungsform und die Schwingungsfrequenz hängen daher vom Maximalausschlag ab.

Die nachfolgende Graphik⁶ zeigt den zeitlichen Schwingungsverlauf eines freien Pendels für Maximalausschläge von 4 Grad (0,07 rad), 25 Grad (0,43 rad), 90 (1,57 rad) Grad und 170 Grad (2,96 rad). Auf der Ordinate ist der Ausschlagwinkel in Radian angegeben (Umrechnungsfaktor in Grad: $180/\pi$). Das rechte Bild veranschaulicht die Phasendiagramme. Eine rein harmonische Schwingung wäre darauf eine rote Gerade unter -45 Grad, bzw. ein blauer Kreis.



Für große Ausschläge nimmt die Frequenz stark mit dem Ausschlagswinkel ab; die Schwingungsform weicht zunehmend von der Sinusform ab. Bei kleineren Ausschlägen wird die Abhängigkeit der Frequenz vom Ausschlag immer geringer; zwischen 4 Grad und 15 Grad ist visuell gerade noch ein Unterschied erkennbar; die Schwingungsform nähert sich zunehmend einer reinen Sinuskurve an.

⁶ Die Graphik zeigt das Ergebnis einer numerischen Integration der Differentialgleichung. Das entsprechende Programm *Oszillatoren* ist Teil des Werks „Mathematik mit Simulationen lehren und lernen“ dessen digitale Ausgabe kostenfrei von der homepage des Autors bezogen werden kann. <http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~roess/MatheUndSimulation.htm>

Für kleine Schwingungsamplituden kann man rechnerisch näherungsweise den Sinus durch sein Argument ersetzen. In dieser Näherung wird die Frequenz dann von Ausschlag unabhängig. Das ist die Basis der Genauigkeit moderner Pendeluhren. Man erhält dann eine analytische Lösung für die Schwingungsdauer, die proportional zur Wurzel aus dem Verhältnis von Pendellänge und Erdbeschleunigung ist.

Näherung für kleine Ausschläge $\sin \alpha \approx \alpha$ (für $\alpha < 4$ Winkelgrad ($\sin \alpha - \alpha < 10^{-3} \alpha$))

$\sin \alpha \approx \alpha \rightarrow$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L} \alpha$$

Lösungsansatz : periodische Schwingung mit Schwingungsdauer T

$$\alpha = \sin \frac{2\pi}{T} t \rightarrow \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha \rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L};$$

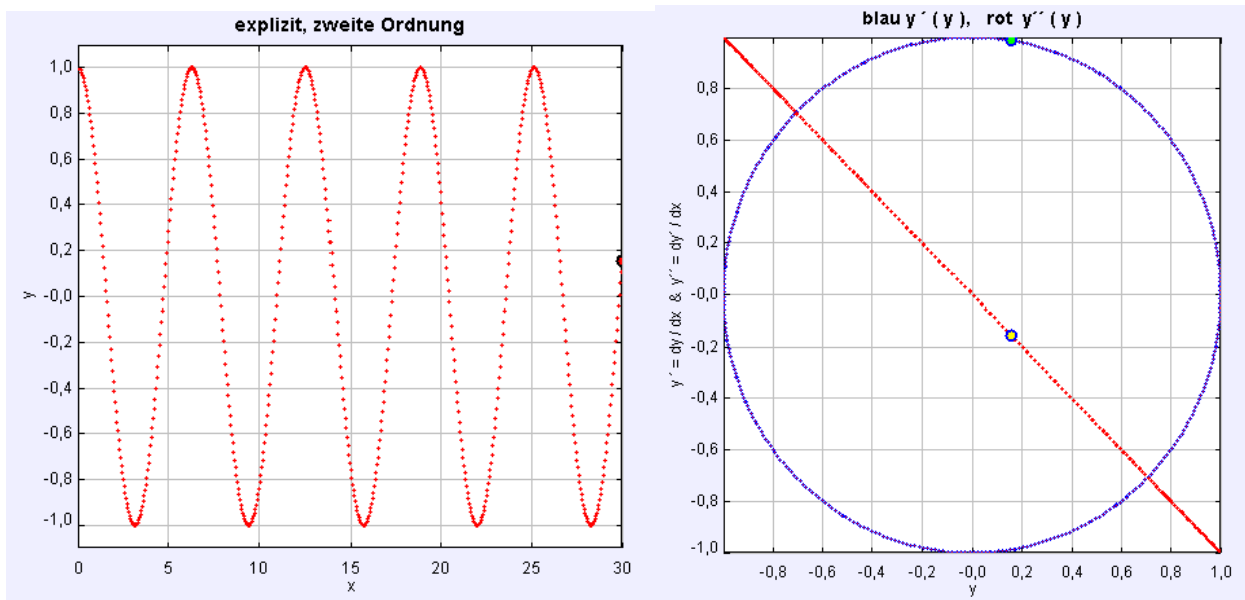
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\alpha = \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right)$$

Die Schwingungsdauer ist näherungsweise unabhängig vom Ausschlag

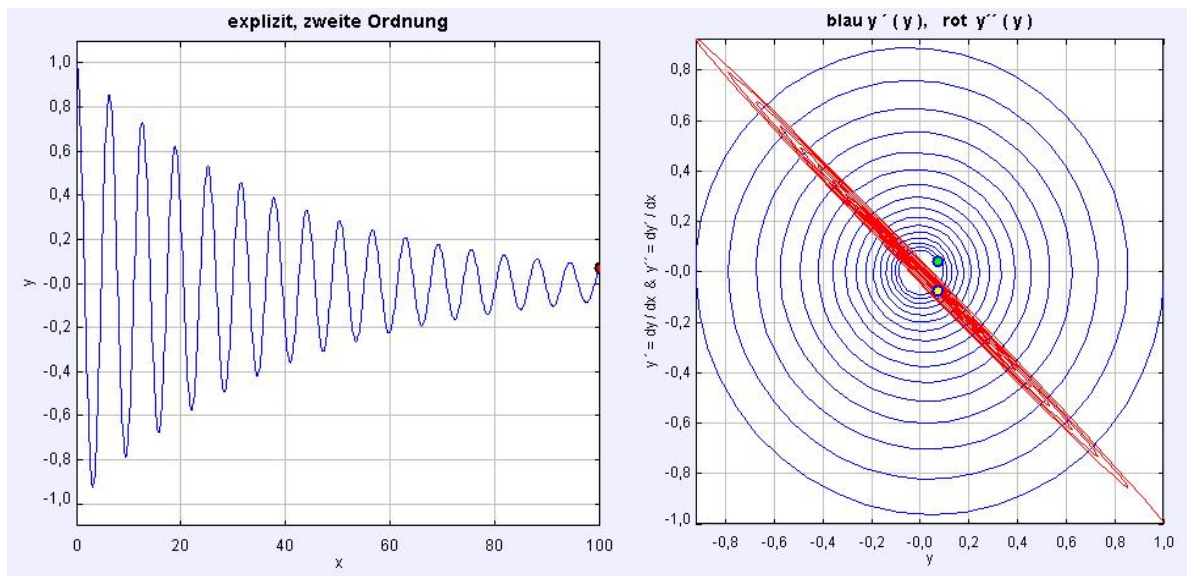
$L = 1 \text{ m} \rightarrow T \approx 2,006 \dots$ Sekunden ("Sekundenpendel")

Die Schwingung selbst (linkes Bild) ist in dieser Näherung eine reine *harmonische* Sinus-Schwingung. Das Phasendiagramm (rechtes Bild; Kreis und Gerade unter -45 Grad) entspricht einem zentralen Ausschnitt aus dem obigen Diagramm für kleine Ausschläge.



Im *Phasendiagramm* wird blau die Abhängigkeit der ersten Ableitung (der Winkelgeschwindigkeit) vom Ausschlagwinkel gezeigt, rot der Abhängigkeit der zweiten Ableitung (der Winkelbeschleunigung) vom Ausschlagwinkel. Sie zeigt anschaulich, dass für die Sinusfunktion die erste Ableitung (die Cosinusfunktion) um 90 Grad gegen den Winkel verschoben ist, und dass die zweite Ableitung gleich dem negativen Wert der Funktion ist. Das Diagramm ist zum Vergleich mit den späteren, charakteristisch unterschiedlichen Diagrammen der Spindelhemmung wichtig.

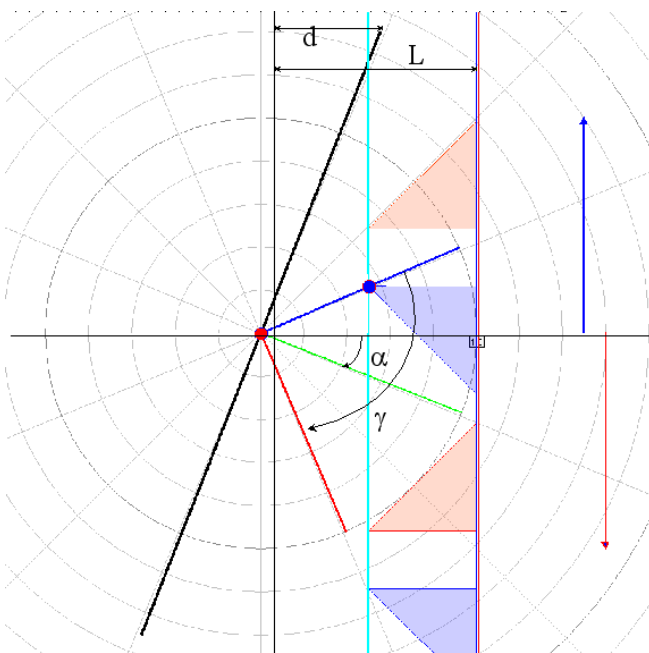
Berücksichtigt man in der Pendelgleichung Reibung, dann erhält man eine periodische Funktion, deren Amplitude mit zunehmender Reibung R immer schneller exponentiell abnimmt (siehe folgendes Bild für Amplitude und Phasen). Für ein freies Pendel in Luft ist die Reibung gering, so dass es lange dauert bis die Amplitude deutlich absinkt.



Für das gewichtbetriebene Pendel einer Uhr gilt das Gleiche wie oben für die allgemeine Hemmung ausgeführt: der Energieverlust des Antriebsgewichts gleicht im Gleichgewicht gerade die Reibung des Pendels selbst und seines Getriebes aus.

3 Geometrie der Waaghemmung

3.1 Spindel und Kronrad



Beim Pendel ist die Relation $\frac{dh}{d\alpha} = L \sin \alpha$. Sie wird durch eine einzige trigonometrische Funktion ($\sin \alpha$) und eine einzige geometrische Abmessung (die Pendellänge L) beschrieben.

Bei der Waaghemmung treten dagegen 2 unterschiedliche trigonometrische Funktionen (Sinus und Tangens) auf, jeweils verknüpft mit 2 unterschiedlichen geometrischen Größen, der Palettenlänge L und dem Eingriff d (Abstand der Kronradzahnspitzen von der Spindelachse)

$$\frac{dh}{d\alpha} = \pm L \cos(\alpha)$$

$$\text{oder } \frac{dh}{d\alpha} = \pm d / \cos^2(\alpha)$$

so dass man für einen Halbausschlag 2 unterschiedliche, aufeinanderfolgende beschleunigende und zwei abbremssende Phasen hat, die sich beim Rückausschlag mit anderen Argumenten wiederholen.

Die folgenden Graphiken sollen dies zeigen (zur Verdeutlichung können Sie das Bild (wie auch alle anderen Graphiken) am Computer durch *Aufziehen* bis auf die Bildschirmabmessungen vergrößern).

Im der linken Graphik schauen wir von oben auf die im Zentrum stehenden Spindelachse.

Von ihr gehen die beiden unter dem Winkel γ angeordneten Spindelpaletten der Länge L aus, Die blaue Palette sei oben; die rote ist dann um den Durchmesser des Kronrads nach unten versetzt vorzustellen. Der schwarze Waagbalken ist hier symmetrisch zu den Spindellappen eingezeichnet (was nicht sein muss). Der Ausschlagwinkel α wird von der x - Achse zur grünen Symmetrieachse der Paletten gemessen (in der Skizze ist er negativ).

Die beiden blauen Zähne des Kronrads stehen im *Zahnabstand*. Einer greift gerade in den blauen Lappen ein und beschleunigt ihn unter dem Einfluss des sinkenden Antriebsgewichts (blauer Pfeil) nach oben (zunehmender Winkel). Die Bewegung des Zahns entspricht der Bewegung des Antriebsgewichts, vergrößert um den Übersetzungsfaktor des Getriebes.

Die beiden roten Zähne können nur mit dem roten Lappen interagieren. In der Skizze sind sie außerhalb des Eingriffs. Sie bewegen sich in entgegengesetzter Richtung zu den blauen Zähnen.

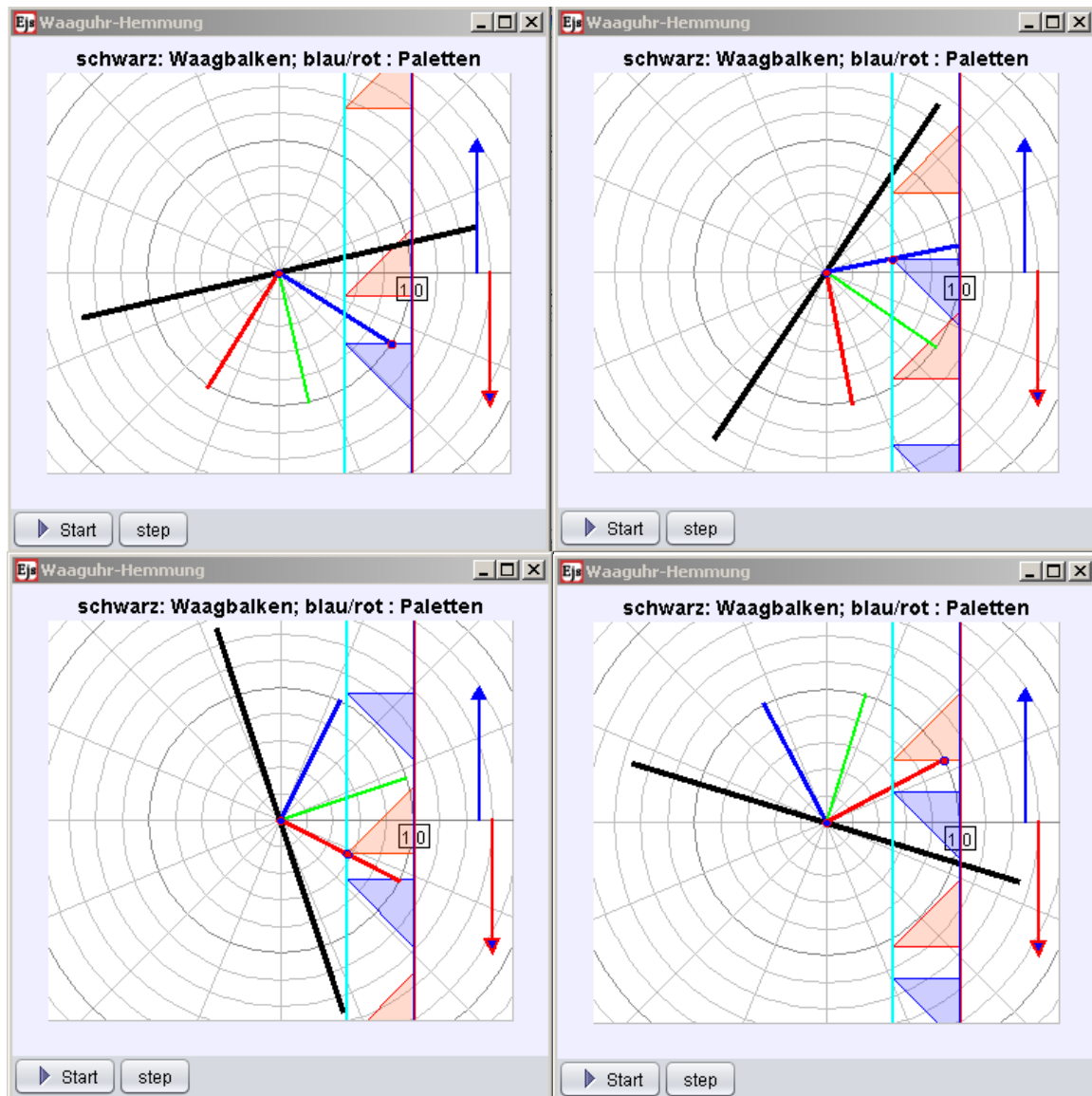
Da das Kronrad eine ungerade Zahl von Zähnen hat, ist die Summe der vorzeichenrichtig gerechneten Abstände eines blauen Zahn und des ihn ablösenden roten Zahn von der x -Achse konstant und gleich einem halben Zahnabstand.

Die Ebene der Zahnspitzen (grüne Linie) befinden sich im Abstand d (Eingriff) von der Spindelachse. Der (minimale) Zahngrund (rotblaue Linie) befindet sich im Abstand L (Palettenlänge).

Die Rückenflanke der Zähne ist in ihrer Form nur insofern wichtig, als an der Spitze ein Passieren der Palette möglich sein muss (dazu würde ein Stift mit rückwärtig starkem Anschliff ausreichen). In der Simulation wird eine lineare Rückflanke so an den Eingriff d angepasst, dass ein Passieren stets möglich ist.

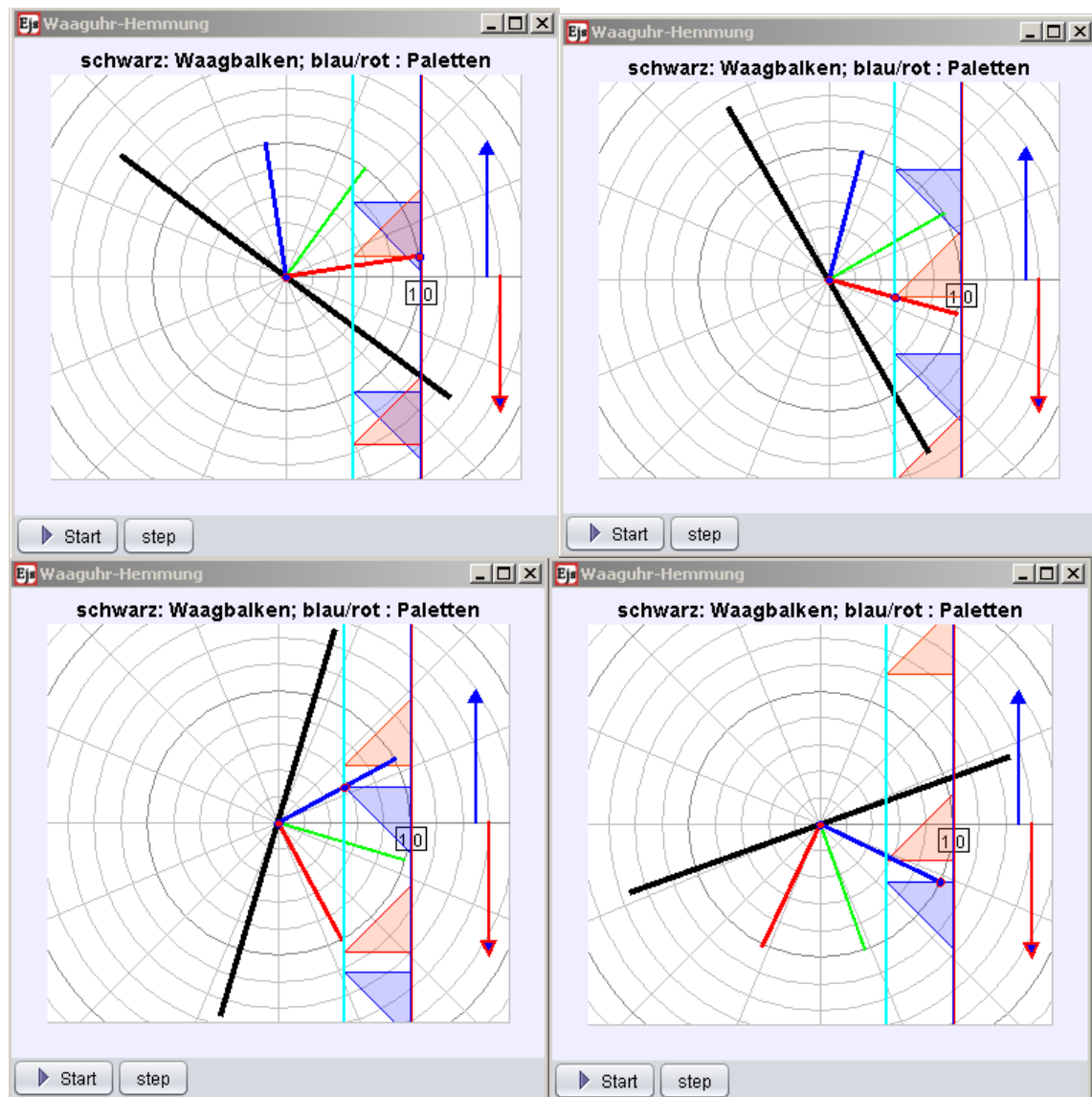
Der Interaktionspunkt zwischen Zahn und Palette ist mit einem Farbpunkt hervorgehoben.

Nach dieser Erklärung können wir an Schnappschüssen aus dem Ablauf einer Vollschwung deren einzelne Phasen unterscheiden. Die ersten 4 Bilder zeigen den Anschwung, die zweiten vier den Rückschwung.



Links oben zeigt den Ausgangspunkt einer Schwingungsperiode bei momentan stillstehender Waag und ruhendem Antriebsgewicht. Der blaue Zahn beschleunigt die blaue Palette mit seiner Flanke. Sobald der Winkel $\alpha = -\gamma/2$ ist (die blaue Palette zeigt in Richtung der x-Achse) springt der Angriffspunkt des Zahns zur Zahnspitze. Auf ihr gleitet die Palette (oben rechts), bis sie den Kontakt verliert.

In diesem Moment trifft die rote Palette die Spitze des roten Zahns (unten links). Dies ist der Moment der größten Winkelgeschwindigkeit und bis hierher ist das Antriebsgewicht gefallen. Der Schwung der Waag treibt den roten Zahn (und damit auch den blauen) entgegen der Antriebsrichtung, so dass das Gewicht angehoben wird, während die Winkelgeschwindigkeit abnimmt. Wenn der Winkel $\alpha = +\gamma/2$ ist (roter Lappen zeigt in Richtung der x-Achse) springt der Angriffspunkt von der Spitze auf die Flanke. Sobald die Energie der Waag durch Anheben des Gewichts (und Reibung) aufgezehrt ist, kommt sie zur Ruhe und beginnt den Rückschwung.



Jetzt beschleunigt der rote Zahn den roten Lappen. Wieder springt der Angriffspunkt von der Flanke zur Spitze (rechts oben). Der blaue Lappen streicht an der Rückflanke des blauen Zahns vorbei und trifft schließlich die vordere, aktive Flanke des nächsten blauen Zahn (links unten, womit die Abbremsung im Rücklauf beginnt. Schließlich kommt die Waag ungefähr im ursprünglichen Ausgangspunkt zur momentanen Ruhe und eine neue Schwingungsperiode beginnt. Da bei dem Zyklus das Kronrad um einen Zahn fortgeschritten ist, erleidet das Antriebsgewicht in ihm einen entsprechenden dauerhaften Energieverlust.

Für die Winkelbeschleunigung ergibt sich aus der Geometrie die folgende Aufeinanderfolge von Funktionen in Abhängigkeit vom Winkel.

In den 4 Phasen gelten für die Winkelbeschleunigungen P ,
die folgenden trigonometrischen Beziehungen, mit A als Antriebsparameter

$$h_1 A = L \sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}); h_2 A = d \tan(\alpha + \frac{\gamma}{2}); h_3 A = -d \tan(\alpha + \frac{\gamma}{2}); h_4 A = -L \sin(\alpha + \frac{\gamma}{2});$$

$$P = \frac{dh}{d\alpha} \rightarrow$$

im Anschwung:

$$P_1 = AL \cos(\alpha + \gamma / 2); \quad \alpha < -\frac{\gamma}{2}$$

$$P_2 = Ad / [\cos(\alpha + \gamma / 2)]^2; \quad -\frac{\gamma}{2} < \alpha < a \cos(\frac{d}{L}) - \frac{\gamma}{2}$$

$$P_3 = -Ad / [\cos(\alpha - \gamma / 2)]^2; \quad a \cos(\frac{d}{L}) - \frac{\gamma}{2} < \alpha < \frac{\gamma}{2}$$

$$P_4 = -AL \cos(\alpha - \gamma / 2); \quad \alpha > \frac{\gamma}{2}$$

im Rückschwung:

$$P_5 = AL \cos(\alpha + \gamma / 2); \quad \alpha > \frac{\gamma}{2}$$

$$P_6 = Ad / [\cos(\alpha + \gamma / 2)]^2; \quad -\left[a \cos(\frac{d}{L}) - \frac{\gamma}{2} \right] < \alpha < -\frac{\gamma}{2}$$

$$P_7 = -Ad / [\cos(\alpha - \gamma / 2)]^2; \quad -\frac{\gamma}{2} < \alpha < a \cos(\frac{d}{L}) - \frac{\gamma}{2}$$

$$P_8 = -AL \cos(\alpha - \gamma / 2); \quad a \cos(\frac{d}{L}) - \frac{\gamma}{2} < \alpha < -\frac{\gamma}{2}$$

Es ist $P_5 = P_1; P_6 = P_2; P_7 = P_3; P_8 = P_4$;

3.2 Modellierung von Reibung (und Fall)

Bei der Spindelhemmung entsteht der ganz überwiegende Reibungsverlust beim schrägen Abgleiten der Paletten auf der Zahnflanke bzw. auf der Zahnspitze. Er wird mit dem folgenden Ansatz beschrieben⁷:

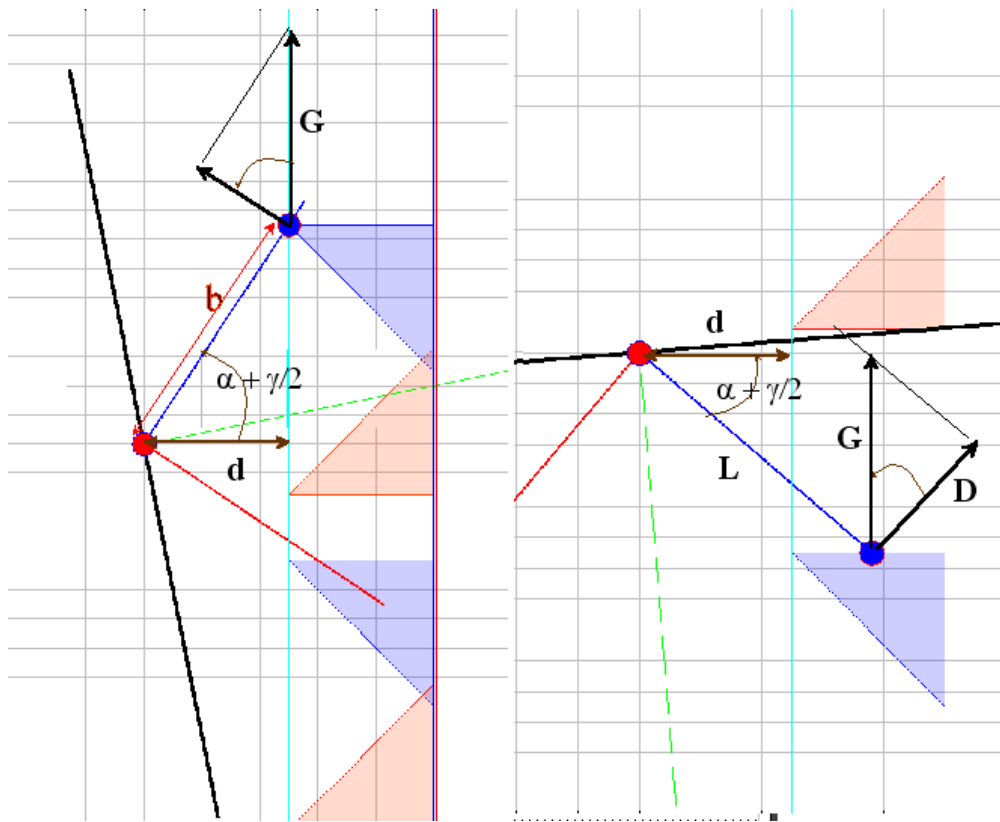
$$\text{Reibungsanteil} = R * \text{Absolutwert der Gleitgeschwindigkeit } v * \text{Anpressdruck } D$$

R ist ein für die Größe der Reibung charakteristischer, konstanter Parameter, entsprechend etwa der Glätte und Schmierung der Paletten. Der Anpressdruck D ist durch das um die Getriebeübersetzung \ddot{U} verminderte Antriebsgewicht G und durch den Gleitwinkel definiert, der wiederum vom Palettenausschlag abhängt. Aus den Bildern der Hemmung liest man die geometrische Beziehung ab

$$D = \frac{G}{\ddot{U}} \cos(\alpha \pm \frac{\gamma}{2})$$

⁷ Reibung und ihre Abhängigkeit von Schmiermittel, Temperatur und Druck ist in der Ingenieurtechnik ein sehr komplexes Thema. Hier wird ein einfaches Modell verwendet, bei dem z.B. der Einfluss des Drucks auf die Viskosität des Schmiermittels vernachlässigt wird.

Dabei gilt das positive Vorzeichen für die Interaktion mit der blauen Palette, das negative für die mit der roten, die gegen die blaue um den Winkel γ verdreht ist.



Die Gleitgeschwindigkeit folgt aus der Geometrie für Zahnspitze und Zahnflanke (die nicht hinterschnitten, also senkrecht angenommen wird⁸).

⁸ Mit Hinterschnitt der Zahnflanken werden die Formeln ziemlich unübersichtlich, ohne dass sich wesentlich neue Erkenntnisse ergeben.

Druck auf Palette

$$D = \frac{G}{\ddot{U}} \cos(\alpha \pm \frac{\gamma}{2})$$

Gleiten auf Zahnspitze (entlang der Palette)

Abstand zur Spindelachse $y = d = \text{const}$

Abstand Spindelachse zur Zahnspitze : b

$$b = \frac{d}{\cos(\alpha \pm \frac{\gamma}{2})}$$

$$\text{Gleitgeschwindigkeit } v = \frac{db}{dt} = \frac{db}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d \sin(\alpha \pm \frac{\gamma}{2})}{\left(\cos(\alpha \pm \frac{\gamma}{2})\right)^2} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\text{Reibung} = RD|v| = d \frac{RG}{\ddot{U}} \left| \tan(\alpha \pm \frac{\gamma}{2}) \right| \frac{d\alpha}{dt}$$

Gleiten auf Zahnflanke (in y - Richtung)

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$y = \pm L \cos(\alpha \pm \frac{\gamma}{2}) \rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = \mp L \sin(\alpha \pm \frac{\gamma}{2})$$

$$v = \mp L \sin(\alpha \pm \frac{\gamma}{2}) \frac{d\alpha}{dt}$$

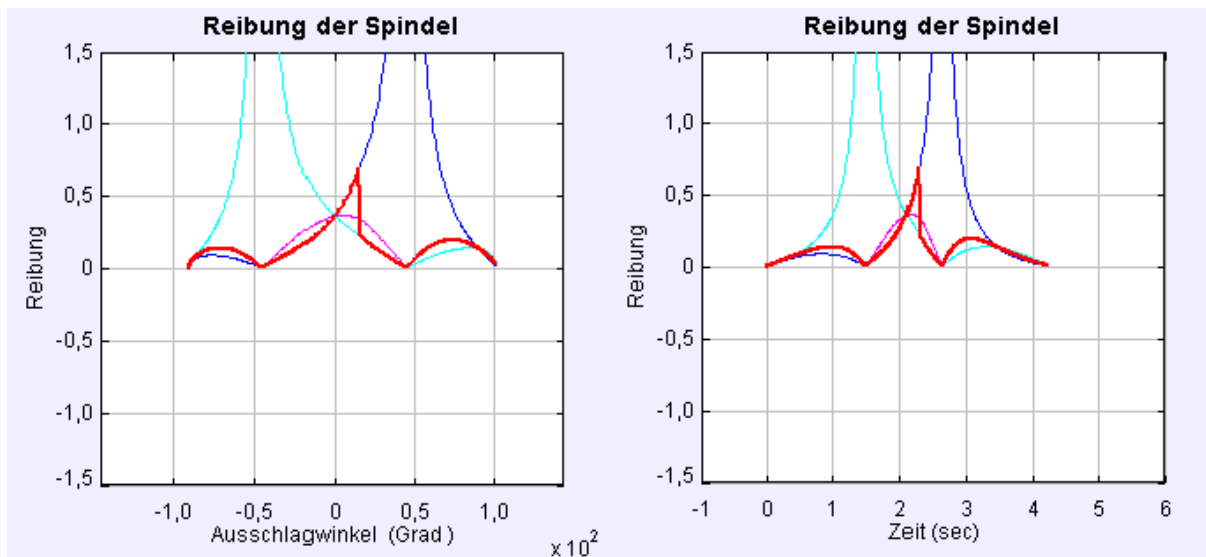
$$\text{Reibung} = RD|v| = L \frac{G}{\ddot{U}} \left| \cos(\alpha \pm \frac{\gamma}{2}) \sin(\alpha \pm \frac{\gamma}{2}) \right| \frac{d\alpha}{dt}$$

Die Simulation berücksichtigt diese Glieder in der Differentialgleichung innerhalb der jeweils gültigen Winkelbereiche.

Die folgenden beiden Bilder veranschaulichen den Verlauf der Reibung während einer Halbschwingung mit großem Ausschlag. Die dünnen farbigen Kurven zeigen die zugrundeliegenden Winkelfunktionen, die dicke rote Kurve die jeweils aktiven Anteile mit den Sprüngen zwischen ihnen.

Das linke Bild zeigt die Reibung als Funktion des Ausschlagswinkels, das rechte als Funktion der Zeit. Wegen der variierenden Winkelgeschwindigkeit sind die Verläufe charakteristisch unterschiedlich.

Die Nullstellen an Anfang und Ende rühren daher, dass im Umkehrpunkt die Winkelgeschwindigkeit der Spindel Null ist. Die Nullstellen dazwischen zeigen an, dass vor dem Umklappen Flanke auf Zahn ($\alpha = \gamma/2$) die Gleitgeschwindigkeit in Richtung der Zahnflanke und der Palette Null wird. Die höchste momentane Reibung liegt beim Zahnwechsel vor; hier hat die Spindel die höchste Winkelgeschwindigkeit und die Variation des Winkels mit der Zahnstellung hat gleichzeitig ein Maximum. Das Bild der Halbschwingung zeigt auch in der Reibung die charakteristische Unsymmetrie der Spindelhemmung zum Nullpunkt. In der zweiten Halperiode kehrt sie sich um, so dass die Gesamtschwingung wieder periodisch wird.



Mit der Berücksichtigung der Reibung ist es sinnvoll zwischen dem Antriebsgewicht G selbst (reduziert um die Übersetzung des Getriebes) und seiner Relation A zum Trägheitsmoment der Waag zu unterscheiden. Während A im Wesentlichen die Periodendauer bestimmt, ist das Gewicht durch den Anpressdruck auch für die Reibung verantwortlich. In der Simulation sind dementsprechend 2 Schieber für die Variablen A und G vorgesehen. Solange A konstant bleibt, wird mit Variation von G nur die Reibung (nicht der Reibungskoeffizient R !) verändert.

Der *Fall* tritt als hemmender Impuls jeweils beim Zahnwechsel auf, wenn beim Ablösen eines Zahns von seiner Palette der Gegenzahn zu seiner Gegenpalette eine endliche Distanz hat. Er fällt dann ohne Hemmung schnell⁹ auf die Palette. Auch wenn der Impuls bei hohem Antriebsgewicht und großem Fall sehr heftig und akustisch auffallend sein kann, ist seine Auswirkung auf das Schwingungsverhalten der Waag gering, da seine Dauer sehr kurz und damit sein Energieinhalt gering ist. Eigene Modellierungsversuche haben gezeigt, dass es ausreicht den Energieverlust durch *Fall* der Reibung zuzuschlagen. Der *Fall* wird im Simulationsbild der Waaghemmung so berechnet, so dass die Zähne bei endlichem *Fall* einen entsprechenden Sprung zur Palette vollführen.

4 Vollständige Differentialgleichung der Waaghemmung

Die vollständige Differentialgleichung der Waaghemmung lautet nun

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mg}{J} A(\alpha_i) - GR(\alpha_i, \frac{d\alpha}{dt}) = -P_i(\alpha_i, \frac{d\alpha}{dt})$$

Der Term $A_i()$ ist in i (4) Phasen vom Ausschlagwinkel abhängig, der Reibungsterm zusätzlich kontinuierlich von der Winkelgeschwindigkeit.

Nachfolgend sind die Terme in der Terminologie zusammengestellt, wie sie in der Simulationsprogrammierung verwendet werden (diese lässt z.B. keine griechischen Buchstaben zu). Die Korrespondenz ist wie folgt:

⁹ Praktisch begrenzt wird die Fallgeschwindigkeit durch die Trägheit von Kronrad und Bodenrad.

$$y \equiv \alpha$$

$$y_s \equiv \frac{d\alpha}{dt}$$

$$y_functions \equiv \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$y_functions$ wird in der jeweils gültigen Version im Funktionsfenster der Simulation angezeigt

$$\gamma \equiv \gamma$$

$$A = \frac{mg}{J} \frac{1}{\ddot{U}}$$

$$G = \frac{mg}{\ddot{U}}$$

U : Getriebeübersetzung

Die 4 Reibungsterme sind unter Berücksichtigung des Absolutwerts der Gleitgeschwindigkeit

$$R1 = -y_s * L * R * G * \text{Math.cos}(y + \gamma / 2) * \text{Math.sin}(y + \gamma / 2); // \text{negativ wegen } |v|$$

$$R2 = y_s * d * R * G * \text{Math.tan}(y + \gamma / 2);$$

$$R3 = -y_s * d * R * G * \text{Math.tan}(y - \gamma / 2); // \text{negativ wegen } |v|$$

$$R4 = y_s * L * R * G * \text{Math.cos}(y - \gamma / 2) * \text{Math.sin}(y - \gamma / 2);$$

Die 4 Beschleunigungsterme sind

$$P1 = "A * L * \cos(y + \gamma / 2) + L * y_s * R * G * (\sin(y + \gamma / 2) * \cos(y + \gamma / 2))";$$

$$P2 = "A * d / \cos(y + \gamma / 2) / \cos(y + \gamma / 2) - d * y_s * R * G * \text{abs}(\tan(y + \gamma / 2))";$$

$$P3 = "- A * d / \cos(y - \gamma / 2) / \cos(y - \gamma / 2) + d * y_s * R * G * \tan(y - \gamma / 2)";$$

$$P4 = "- A * L * \cos(y - \gamma / 2) - L * y_s * R * G * \text{abs}(\sin(y - \gamma / 2) * \cos(y - \gamma / 2))";$$

Die Gültigkeitsbereiche sind mit ihren logischen Bedingungsbeziehungen

$$\text{if } (y_s \geq 0 \ \&\& \ y \leq -\gamma / 2) \{ y_functions = P1; RR = R1; // \text{Antrieb blau an Flanke} \}$$

$$\text{else if } (y_s \geq 0 \ \&\& \ y < a \cos) \{ y_functions = P2; RR = R2; // \text{Antrieb blau an Spitze} \}$$

$$\text{else if } (y_s \geq 0 \ \&\& \ y \leq \gamma / 2) \{ y_functions = P3; RR = R3; // \text{Ruecktrieb rot an Spitze} \}$$

$$\text{else if } (y_s \geq 0 \ \&\& \ y > \gamma / 2) \{ y_functions = P4; RR = R4; // \text{Ruecktrieb rot an Flanke} \}$$

$$\text{else if } (y_s < 0 \ \&\& \ y > \gamma / 2) \{ y_functions = P4; RR = R4; // \text{Antrieb rot an Flanke} \}$$

$$\text{else if } (y_s \leq 0 \ \&\& \ y \geq -a \cos) \{ y_functions = P3; RR = R3; // \text{Antrieb rot an Spitze} \}$$

$$\text{else if } (y_s \leq 0 \ \&\& \ y \geq -\gamma / 2) \{ y_functions = P2; RR = R2; // \text{Ruecktrieb blau an Spitze} \}$$

$$\text{else if } (y_s \leq 0 \ \&\& \ y \leq -\gamma / 2) \{ y_functions = P1; RR = R1; // \text{Ruecktrieb blau an Flanke} \}$$

Damit ist eine vollständige Einzelschwingung dargestellt. In der Simulation wird der Endwert zum Anfangswert für die weitere Berechnung, so dass kontinuierlich weitergerechnet wird.

Im Rechenprogramm sind weitere logische Gleichungen enthalten, um beim Überschreiten der Hemmungsgrenzen ein unbeschleunigtes Weiterschwingen und einen Abbruch sicherzustellen; Bedingungen, die zu einer negativen Zahnabstand führen würden, blockieren die Be-

rechnung. Diese logischen Begrenzungen sind hier der Übersicht halber weggelassen, ebenso wie die Berechnungsschritte für die Visualisierung der Hemmung (Fenster *Waag-Hemmung*)

Die Getriebeübersetzung \ddot{U} ist wie folgt definiert:

$$\ddot{U} = \frac{\text{Radius der Bodenradseiltrommel}}{\text{Radius des Kronrads}} * \frac{\text{Zähnezahl des Bodenrads}}{\text{Zähnezahl des Kronradtriebs}}$$

$$\text{Zahlenbeispiel als Abschätzung: } \ddot{U} = \frac{0,1[\text{m}]}{013[\text{m}]} \frac{160}{16} \approx 7$$

$$\frac{mg}{J} \frac{L+d}{2} = \frac{2[\text{kg}] * 9,8[\text{ms}^{-2}]}{0,2[\text{kg}] * 0,3^2[\text{m}^2]} * 0,0075[\text{m}] \approx 8[\text{s}^{-2}]$$

$$\frac{mg}{J} \frac{L+d}{2} * \frac{1}{\ddot{U}} \approx 1$$

In die Beschleunigungsfaktoren der einzelnen zeitlichen Phasen gehen die Parameter L oder d ein. Deshalb wird in der obigen Abschätzung ihr Mittelwert verwendet. Der maßgebliche Faktor folgt dann in der Größenordnung 1. Setzt man also für A , G und R Werte in der Größenordnung 1 an, dann erhält man realistische Zahlen für die Schwingungsperioden, in der Größenordnung von einigen Sekunden.

Durch die komplizierte Abhängigkeit der Winkelbeschleunigung vom Winkel ist es nicht möglich die Differentialgleichung analytisch auszuwerten; sie ist aber natürlich keine wesentliche Erschwernis für eine numerische Lösung. Diese ermöglicht es dann auch die Zusammenhänge interaktiv zu gestalten und zu visualisieren.

Die Simulationsdatei ist dieser Textdatei beigeheftet. Die folgenden Bilder sind Momentaufnahmen aus Simulationsläufen.

5 Simulation der Waaghemmung

5.1 Methode

Zur Auswertung der Differentialgleichung der Waaghemmung wurde mit *EJS*¹⁰ eine Simulation entwickelt, die in fünf Fenstern auf dem Bildschirm gleichzeitig den Zeitablauf des Ausschlagwinkels, die zugehörigen Phasendiagramme, die Winkelabhängigkeit der Reibung und die Geometrie der Waagbewegung errechnet und visualisiert. Daneben werden in einer Datentabelle charakteristische Zeitpunkte und Zahlenwerte ausgegeben, aus denen Frequenz, Ausschlag und Reibungseinfluss mit hoher Genauigkeit bestimmt werden können.

Als eingebbare, teils durch Schieber veränderbare Parameter werden verwendet

Palettenwinkel γ

Spindelabstand d

Zahnabstand

Anfangswert des Ausschlagwinkels

Berechnungsschritt

¹⁰ *EJS* (Easy Java Simulation) ist ein von Francisco Esquembre entwickeltes, kostenloses Simulations- Programm <http://www.um.es/fem/EjsWiki/pmwiki.php> mit zahlreichen Hilfsmitteln. Mit ihm kann man einfache bis sehr komplexe Simulationen ohne tiefere Programmierkenntnisse entwickeln und ihre Ergebnisse graphisch visualisieren.

Maximale Rechenzeit

Antrieb A (Relation wirksames Gewicht/ Trägheitsmoment)

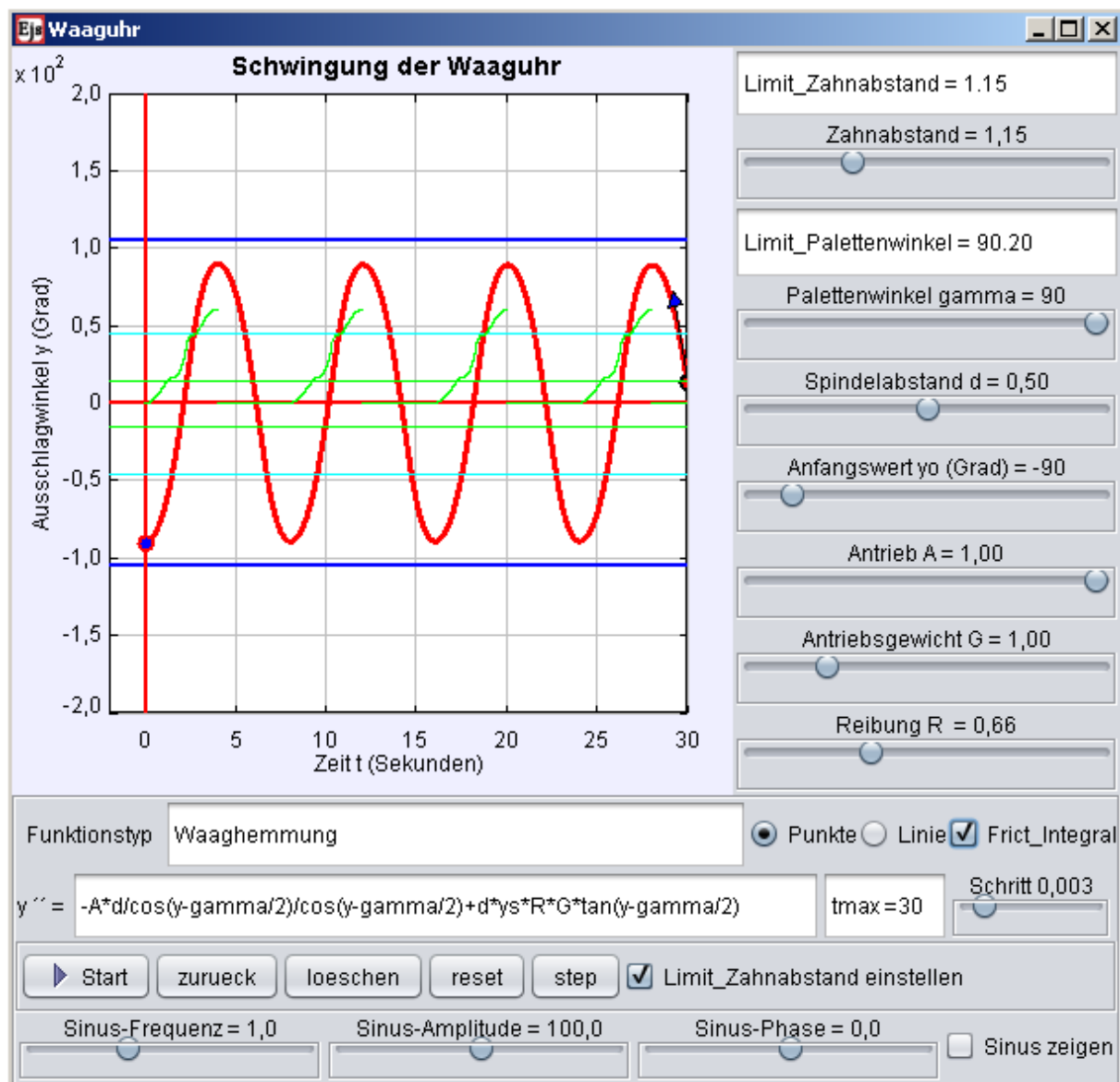
Gewicht G

Reibungskoeffizient R

Die Berechnung kann kontinuierlich oder in Einzelschritten (Taste *step*) erfolgen. Verschiedene Rechenläufe mit unterschiedlichen Parametern können überlagert aufgezeichnet werden.

Den Rechenergebnissen für die Waag kann eine in Frequenz, Amplitude und Phase einstellbare Sinusfunktion überlagert werden (Taste *Sinus zeigen*), um die Waag mit dieser Standard-Schwingungsform zu vergleichen.

5.2 Hauptfenster *Schwingung der Waaguhr*



Das Fenster hat ein (t, y) Koordinatensystem für die Anzeige des Zeitverlaufs des Waagauschlags y . Darum herum sind Elemente zum Einstellen von Parametern, zum Ein- und Ausschalten von Optionen und zur Anzeige wichtiger Rechengrößen angeordnet.

In dem Koordinatensystem läuft auf der Abszisse die Zeit. Die Ordinate zeigt den Winkel in Grad (Beachten Sie, dass die Zahleneinheit 100 Grad anzeigt!).

Das Textfenster y'' zeigt die momentan gültige Formel für die normierte Beschleunigung einschließlich Reibung. Sie springt während der Berechnung beim Überschreiten der horizontalen Linien im Diagramm und der Maxima des Winkelausschlags.

Zahnabstand, Palettenwinkel und Spindelabstand können mit Schiebern eingestellt und verändert werden. Sie sind dabei auf eine Palettenlänge von $L = 1$ normiert. Im Fenster *Limit_Palettenwinkel* wird der minimale Zahnabstand ausgegeben, unterhalb dessen die Hemmung klemmt. Die Schieber für Zahnabstand, Spindelabstand und Palettenwinkel sind so verkettet, dass nur nichtklemmende Kombinationen funktionieren. Mit dem Schaltkästchen *Limit_Zahnabstand einstellen* wird der Grenzwert des Zahnabstands automatisch eingestellt. Dies ist die einfachste Ausgangsposition für andere Kombinationen.

Mit dem Schieber *Schritt* wird das Zeitintervall der Berechnung gewählt. Wegen der winkelabhängigen Sprünge in der Beschleunigung darf die Schrittbreite der numerischen Berechnung nicht zu groß gewählt werden, wenn man genaue Ergebnisse erhalten will. Zulässige Werte ermittelt man rasch durch überlagerte Rechengänge mit abnehmender Schrittgröße.

Für die numerische Integration der Differentialgleichung wird das Verfahren *Runge-Kutta_4* verwendet.

Die maximale nominale Rechenzeit (Sekunden) kann in einem Zahlenfeld als Zahl eingegeben werden (für Dezimalstelle in amerikanischer Schreibweise Punkt, nicht Komma verwenden!). Nach der Zahleneingabe wird das Feld gelb unterlegt. Mit der Tastaturtaste *ENTER* wird der neue Wert übernommen.

Der Anfangswert des Winkels kann mit einem Schieber gewählt, aber auch bequem im Diagramm durch *Ziehen* des blauen Anfangspunktes mit dem Mauszeiger eingestellt werden.

Es wird angenommen, dass der Start immer aus der Ruhe erfolgt (Winkelgeschwindigkeit Null).

Der blaue Pfeil am laufenden Berechnungspunkt zeigt Betrag und Richtung der momentanen Winkelbeschleunigung an.

Der Schieber *Antrieb A* verändert das Verhältnis von Antriebsgewicht zu Waag-Trägheitsmoment. Der Schieber *Antriebsgewicht G* bestimmt das Gewicht selbst und damit auch den Anpressdruck auf den Reibungsflächen. Der Schieber *Reibung R* definiert den Reibungskoeffizienten der aneinander vorbei gleitenden Oberflächen. $R \cdot G$ bestimmen zusammen die Reibung.

Mit dem Schalter *F_Integral* wird das Zeitintegral der Reibung über die ansteigende Halbperiode (multipliziert mit 100) angezeigt oder ausgeschaltet. Im Bild ist diese Option eingeschaltet; die ansteigende grüne Linie ist das Zeitintegral.

Die Parameter *Frequenz*, *Amplitude* und *Phase* der zu vergleichenden harmonischen Schwingung können mit Schiebern kontinuierlich verändert werden. Der Schalter *Sinus zeigen* schaltet diese Hilfsfunktion ein und aus.

Die grünen horizontalen Linien im Koordinatenfeld zeigen den Punkt an, an dem der Interaktionspunkt der Spindelpalette von Spitze auf Flanke des Zahns umspringt. Die dünnen cyanfarbenen Linien zeigen den Zahnwechsel. Die dicken blauen Linien bilden den Grenzwinkel, bei dem kein hemmender Eingriff mehr auftritt. Alle diese Größen hängen von den Eingabeparametern ab.

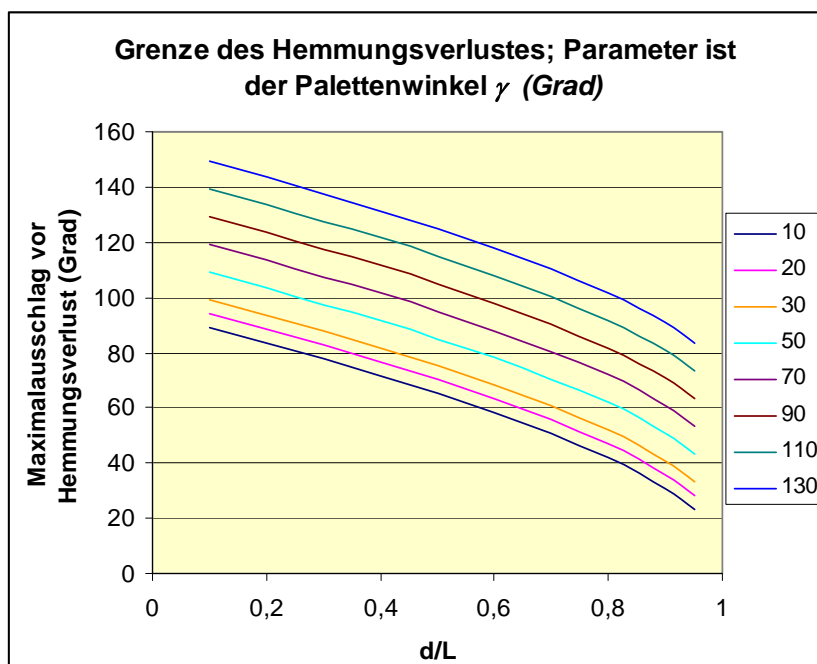
Für die horizontal eingezeichneten bunten Grenzlinien gilt:

Umklass - Punkte von Flanke auf Spitze (grüne Linie): $\alpha = \mp \frac{\gamma}{2}$

Zahnwechsel (cyan Linie) $\cos(\alpha \pm \frac{\gamma}{2}) = \pm \frac{d}{L} \rightarrow \alpha = \pm a \cos(\frac{d}{L}) \mp \frac{\gamma}{2}$; $a \cos \equiv \text{Arcuscosinus}$

Hemmungsverlust (dicke blaue Linie): $\cos(\alpha \mp \frac{\gamma}{2}) = \frac{d}{L} \rightarrow \alpha = \pm a \cos(\frac{d}{L}) \pm \frac{\gamma}{2}$

Im folgenden Diagramm sind die (positiven) Grenzwinkel für Hemmungsverlust für unterschiedliche Palettenwinkel als Funktion von d/L aufgezeichnet. Bei flachem Eingriff (z.B. $d/L = 0,9$) und kleinem Palettenwinkel (z.B. 30 Grad) ist der Maximalausschlag gering (im Zahlenbeispiel ± 40 Grad); bei tiefem Eingriff (z.B. $d/L = 0,3$) und einem Palettenwinkel von 100 Grad kann er ± 130 Grad betragen. Es sind also grundsätzlich Gesamtausschläge über ± 180 Grad möglich, was allerdings bei der klassischen Aufhängung der Waag durch den zentral angeordneten Galgen verhindert wird.



Der *Start*- Button löst die Berechnung aus und stoppt sie auch. Resultieren aus den Einstellungen negative Zahnabstände, kann die Berechnung nicht gestartet werden und der Start-Button ist gesperrt. Mit *Zurück* springt der Ausgangspunkt der Rechnung wieder auf Null, während die vorherigen Werte sichtbar bleiben. Man kann jetzt neue Parameter setzen und mit Start eine zweite Kurve überlagern. *Löschen* und *Reset* haben die übliche Funktion.

Wenn Ihr Rechner einschließlich der Graphikkarte genügend schnell ist und ausreichend freie Kapazitäten hat, läuft die visuelle Darstellung in Echtzeit ab.

Andernfalls kann es bei der Berechnung zu Verzögerungen kommen, die aber die ausgegebenen Zeitwerte nicht verfälschen. Die Rechnung läuft dann flotter ab, wenn keine Einzelpunkte gezeigt werden (Option *Linie* und Option *Punkt* ausschalten). Bei einem *Zurück* entsteht mit *Linie* eine Rücksprunglinie. Die kann man für die Darstellung von Überlagerungen beseitigen indem man nach der Berechnung überlagerter Lösungen die Option *Punkt* wählt.

Man kann bei langsamem Rechner den Ablauf auch beschleunigen, indem man nicht notwendige Fenster schließt. Diese entstehen wieder bei Neustart der Simulation.

Beim Erststart werden voreingestellte Parameter geladen.

5.3 Fenster *Spitzenwerte*

Das Programm berechnet für die Spitzen der positiven Halbschwingungen den jeweiligen Zeitpunkt t , den Ausschlag y (Grad) und den Endwert des Zeitintegrals der Reibung F über eine Vollschiwingung.

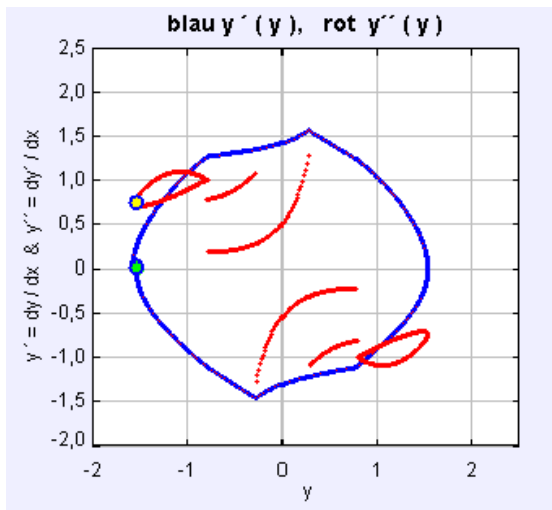
Spitzenwerte		
t	y	F
t=0,000	y = 0,000	F = 0,879
t=2,990	y = 46,172	F = 0,884
t=9,040	y = 46,323	F = 0,880
t=15,080	y = 45,944	F = 0,880
t=21,120	y = 46,049	F = 0,883
t=27,160	y = 46,323	

Diese Werte werden in dem links gezeigten Datenfenster ausgegeben. Die Genauigkeit der Zeitwerte entspricht der Schrittbreite der Integration der Differentialgleichung und liegt damit im Bereich $<0,01$ Sekunde.

Aus diesen Zahlen kann leicht abgelesen werden ob die Waag eingeschwungen ist (y konstant), was der Anfangswert für einen eingeschwungenen Lauf sein sollte (im Beispiel ~ 46 Grad) und wie groß die momentane Periode ist (~ 6 Sekunden)

Außerdem kann aus F und der Periodendauer das normierte Zeitintegral der Reibung ermittelt werden (siehe weiter unten)

5.4 Fenster *Phasenraumkurven*



Rot wird die Winkelbeschleunigung, blau die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Winkel gezeigt (in Radian).

Die rote Kurve der Winkelbeschleunigung ist ganz anders als der lineare Verlauf beim Pendel mit kleiner Amplitude. Man erkennt die Sprünge und den hystereseeähnlichen Verlauf. Vom Startwinkel ausgehend wird die Waag über die Nullstellung hinaus beschleunigt.

Die Winkelgeschwindigkeit ist durch die Integration über die Beschleunigung dagegen gar nicht weit von der Kreisform des harmonischen Oszillators entfernt und man kann daraus bereits

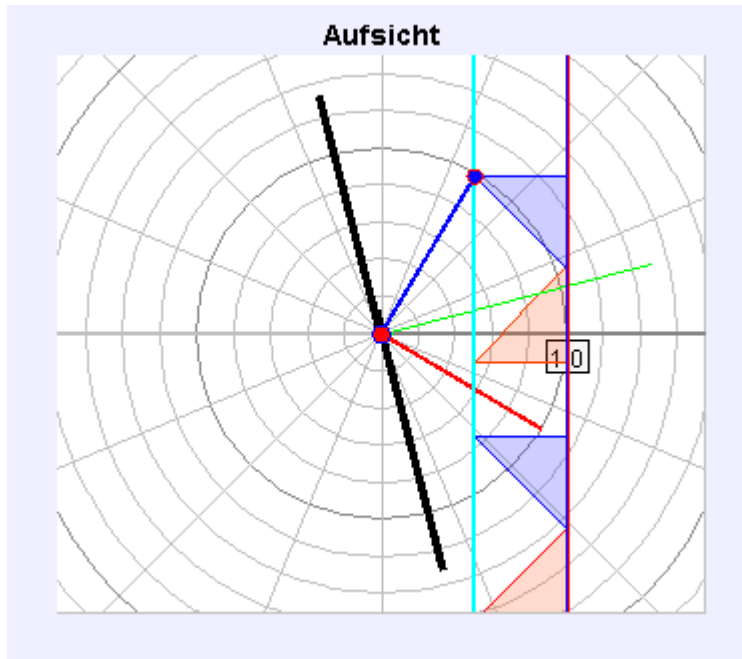
vermuten, dass der Zeitverlauf durchaus sinusähnlich sein wird.

5.5 Fenster *Waaguhr- Hemmung*

Das Fenster zeigt den zeitlichen Ablauf der Waag-Hemmung, synchron zu den beiden anderen Fenstern. Wir hatten dieses Bild bereits bei der Erläuterung der einzelnen Beschleunigungsphasen verwendet.

Hier ist der Moment kurz vor der der Ablösung des blauen Zahns festgehalten. Man erkennt, dass der rote Zahn noch eine Lücke zur roten Palette hat. Bei der Ablösung wird also ein Sprung des Zahns (des Kronrads) stattfinden, der als *Fall* einen heftigen, aber sehr kurzen

hemmenden Impuls auf die Palette ausübt. Das durch diesen Impuls ausgelöste Geräusch ist charakteristisch für Spindelhemmungen und ist umso heftiger, je größer der *Fall* ist.



Der Übersicht halber sind nur je 2 blaue und rote Zähne eingezeichnet. Wenn die Palette an einem Zahn vorbeigestrichen ist, springe dieser um einen Zahnabstand nach hinten und wird so für die Rechnung zum nächstfolgenden Zahn.

Der Interaktionspunkt zwischen Palette und Zahn ist blau oder rot markiert.

Die theoretische Grenze der Einstellung ist offensichtlich mit *Fall* Null erreicht, wenn Ablösen des blauen Zahns und Erreichen des roten Zahns zusammenfallen. Bei kleinerem Zahnabstand *klemmt* die Hemmung weil beide

Paletten eingreifen, bei größerem entsteht *Fall*.

Für die Veranschaulichung der Geometrie der Waaghemmung in der Simulation ist es günstig die Palettenlänge L konstant zu halten ($L = 1$) und den Kronradabstand d und den Zahnabstand darauf zu normieren (d/L , $\text{Zahnabstand}/L$). Der Zahnabstand ist dann Variable der Simulationsrechnung.

$$y_1 = \sqrt{L^2 - d^2} = L \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2}$$

$$\alpha = a \sin\left(\frac{y_1}{L}\right) - \gamma / 2 = a \sin \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2} - \gamma / 2;$$

$$y_2 = d \tan(\alpha - \gamma / 2) = d \tan \left[a \sin \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2} - \gamma \right]$$

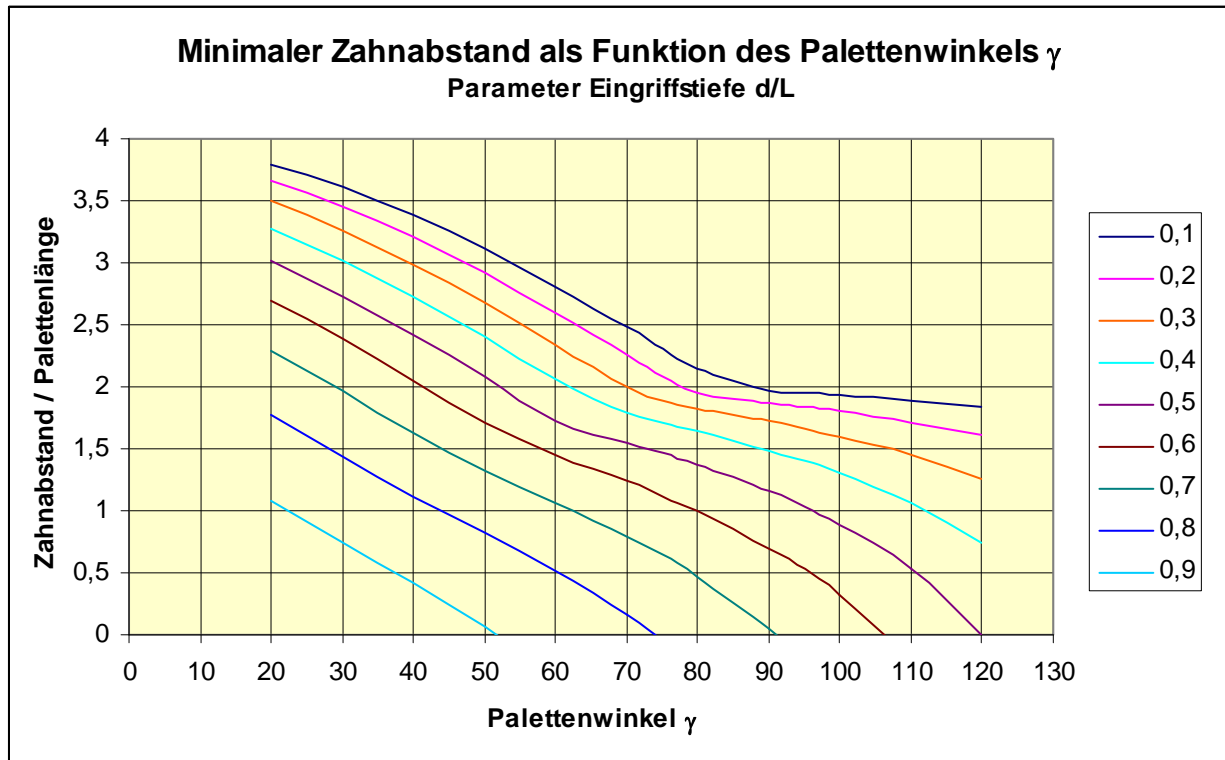
$$y_3 = L \sin(\alpha - \gamma / 2); = L \sin \left[a \sin \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2} - \gamma \right]$$

$$\text{für } y_2 < 0 \rightarrow \text{LimitZahnabstand} = 2(y_1 + y_2) = 2 * L \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2} + \frac{d}{L} \tan(a \sin \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2} - \gamma) \right\}$$

$$\text{für } y_2 = 0 \rightarrow \text{LimitZahnabstand} = 2y_1 = 2L \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2}$$

$$\text{für } y_2 > 0 \rightarrow \text{LimitZahnabstand} = 2 * (y_1 + y_3) = 2 * L \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2} + \frac{d}{L} \sin(a \sin \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L}\right)^2} - \gamma) \right\}$$

Das Diagramm veranschaulicht den Zusammenhang. Der Übergang im Verlauf der Kurven markiert die Grenzen der Gültigkeitsbereiche der obigen Formeln.

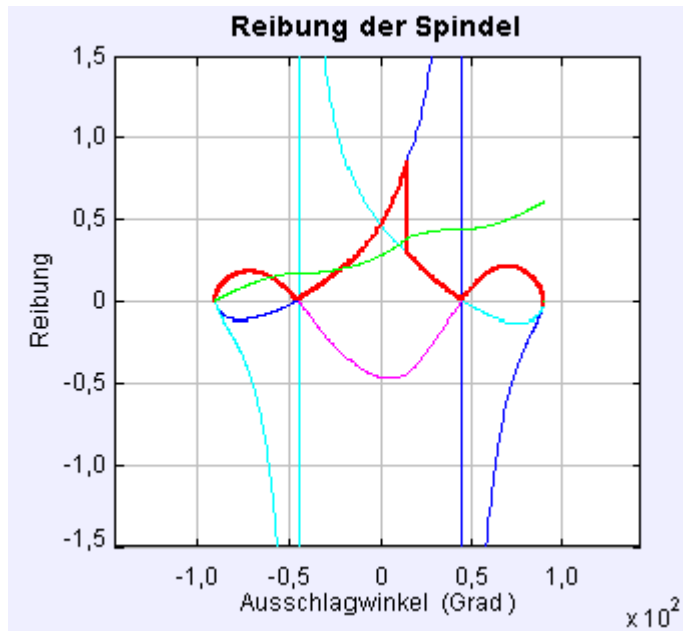


Die etwas kompliziert aussehende Beziehung bereitet bei der numerischen Berechnung natürlich keine Schwierigkeiten; in der Simulation kann man den Grenzwert durch Knopfdruck als Ausgangspunkt einer Neueinstellung automatisch einstellen. Beim Erststart der Simulation ist diese Einstellung durch Wahl der Parameter vorgegeben..

Experimentell besonders überzeugend ist es, in der Simulation die entsprechenden Parameter visuell einzuregulieren. Dabei ist es hilfreich, dass man den Ausgangswinkel im Hauptfenster mit der Maus ziehen kann. Damit verstellt sich im Fenster *Waag- Hemmung* die Position, so dass man die Situation bei kritischen Winkeln stillstehend beobachten kann. Außerdem kann man sich nach *Start* und *Stop* einer besonderen Position mit *Step* annähern. Dazu befindet sich auf dem *Waag- Hemmungsfenster* eine Kopie der *Start/Stop* und *Step*- Tasten aus dem Hauptfenster.

In der Praxis begrenzen Toleranzen der Zähne und Paletten die Einstellung, bei der noch kein „Klemmen“ auftritt, so dass immer ein gewisser *Fall* vorhanden sein wird.

5.6 Fenster *Reibung*



Im Fenster *Reibung* werden mit den dünnen Linien die einzelnen Winkelfunktionen angezeigt, die für die 4 Reibungsphasen gelten (Beschleunigung auf Flanke, auf Spitze; Verzögerung auf Spitze, auf Flanke).

Die dicke rote Linie zeigt das Nacheinander der Reibung in den 4 Phasen einer voll ausgeprägten Halbschwingung. Die konvexen Bögen gelten für den Antrieb auf der Zahnflanke, die konkaven Teilbögen für den Antrieb mit der Zahnspitze.

Je nach dem Maximalausschlag sind die konvexen Bögen mehr oder

weniger ausgeprägt; sie entfallen ganz, wenn bei kleinem Ausschlag nur die Zahnspitzen in Kontakt mit den Paletten treten

In dem Diagramm wird die Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel gezeigt. In 3.2 war daneben auch die Abhängigkeit von der Zeit zu sehen.

Die grüne Linie zeigt das Zeit-Integral über die rote Reibungskurve, dargestellt in der Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel. Sie kann im Hauptfenster mit dem Schalter *F_Integral* ein- oder ausgeschaltet werden. Der Endpunkt der Integralfunktion charakterisiert den Mittelwert während der Halbschwingung. Er wird (multipliziert mit dem Faktor 2) im Datenfenster als Wert für die Reibung in einer Vollschiwingung ausgegeben.

Der stetige Anstieg der Reibungsintegrals begründet, warum man sonstige, geringe Energieverluste (Reibung im Getriebe, *Fall*) als Zuschlag zum Reibungskoeffizienten *R* behandeln kann

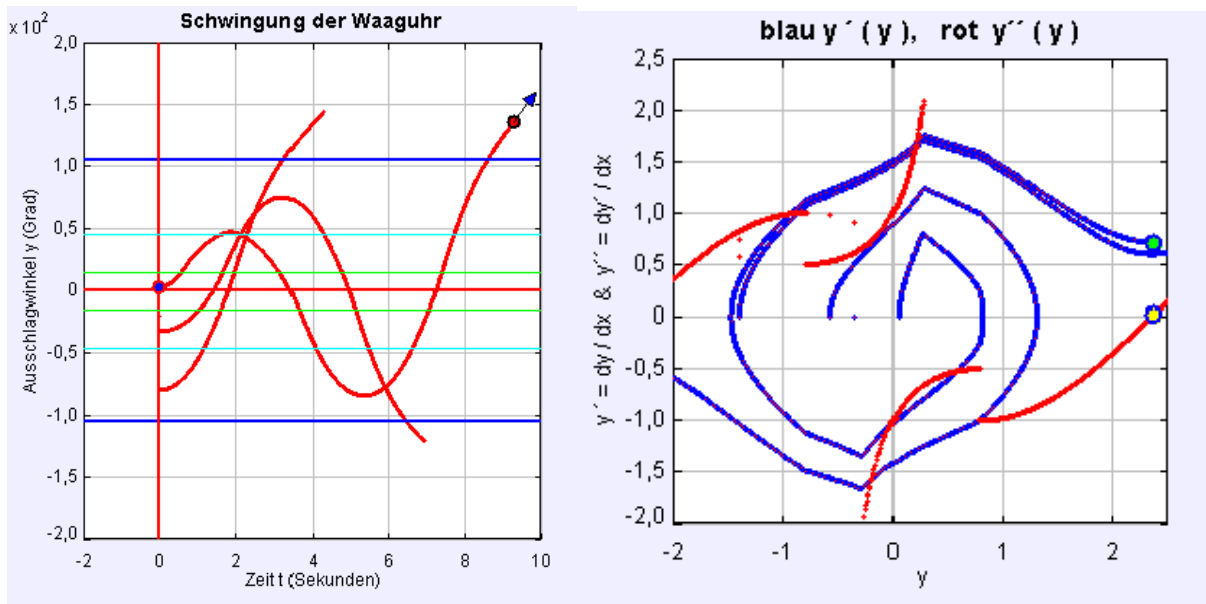
6 Beispielhafte Ergebnisse der Simulationsrechnung

Die Fülle der Möglichkeiten und Erscheinungen kann man nur erfahren, wenn man selbst die Simulation bedient und mit ihr experimentiert. Dazu müssen Sie einfach die beigefügte *EJS*-Datei öffnen. Sie ist gegen ungewollte Manipulationen geschützt, kann aber grundsätzlich mit etwas *EJS*-Kenntnis geöffnet und weiterentwickelt werden (Zugang über das Kontextmenue der rechten Maustaste).

Zur Funktion der Simulationsdatei muss auf dem Rechner das kostenlos im Netz ladbare Programm *Java* (Java Runtime Environment *JRE*) installiert sein. Ihr persönlicher Rechner könnte so eingestellt sein, dass er aus Sicherheitsgründen alle ausführbaren *Java*-Dateien blockiert. In diesem Fall müssten Sie die Einstellung freigeben.

Die folgenden Bilder sind Momentanaufnahmen aus der Simulation, die zeigen, wie man mit diesem rechnerischen Modell experimentieren kann.

6.1 Einschwingen ohne Reibung



Die Aufnahme (links) zeigt, dass eine Waaghemmung ohne Reibung ($R = 0$) „aus dem Ruder läuft“. Von jeder Ausgangsposition aus (Startpunkt bei $t = 0$) wächst die Amplitude an, so dass bereits nach kurzer Zeit die Hemmung verloren geht.

Ursache dafür ist die Asymmetrie der Waaghemmung: Die höchste Geschwindigkeit wird nicht im Nullpunkt erreicht, sondern erst für die bei größerem Winkel liegenden Zahnablösung. Damit wird der erste (positive) Halbausschlag größer als die (negative) Ausgangsposition. Im Rückschwung liegt die gleiche Asymmetrie auf der anderen Seite des Nullpunkts. Man kann das in der Simulation sehr gut am Phasenraumdiagramm verfolgen (rechtes Bild).

In der Simulation wächst der Winkel nach Verlassen der Hemmung linear an (keine Beschleunigung mehr). Die Berechnung wird bei einem Ausschlag von 180 Grad gestoppt.

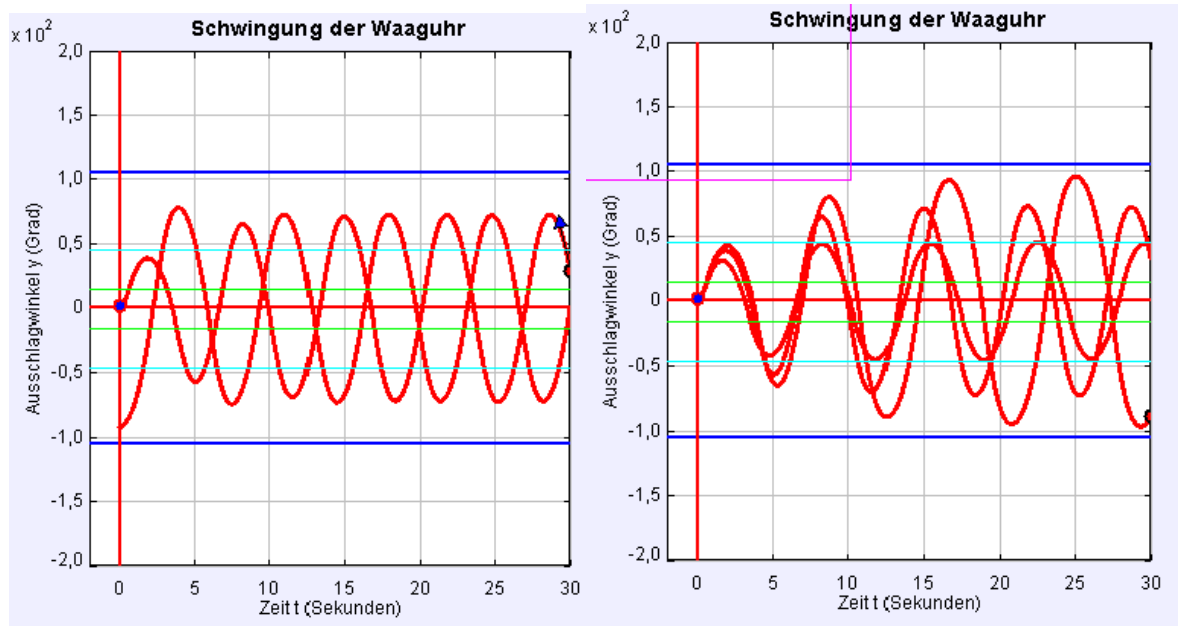
Die Aufnahme zeigt auch, dass die Waag aus jeder Anfangsposition heraus ohne Anstoß (Winkelgeschwindigkeit Null) selbständig anschwingt, dabei im ersten Maximum die cyanfarbige Grenze des Zahnwechsels überschreitet und damit einen Zahnwechsel auslöst.

6.2 Anschwingen der Waag mit Reibung

Im linken Bild schwingt die Waag bei genügend Reibung (hier $R = 1,0$) aus stark unterschiedlichen Ausgangspositionen schnell auf einen konstanten Ausschlag und eine konstante Frequenz ein.

Im rechten Bild wurde die Schwingung aus dem Nullpunkt mit unterschiedlichen Reibungskoeffizienten (0,6; 1,0; 2,0) gestartet. Die „Fluchtgrenze“ liegt für die gewählten Parameter bei $R \sim 0,5$

Die Amplitude stellt sich auf einen Wert ein, der mit zunehmender Reibung abnimmt. Gleichzeitig nimmt die Frequenz zu (die Uhr geht bei kleinerem Ausschlag schneller). Die Uhr schwingt umso schneller auf einen Endausschlag ein je größer die Reibung ist,



Die Waaghemmung ist nach diesem Modell durch die Reibung (einschließlich *Fall*) amplitudenbegrenzt.

6.3 Vergleich mit Sinus-Schwingung

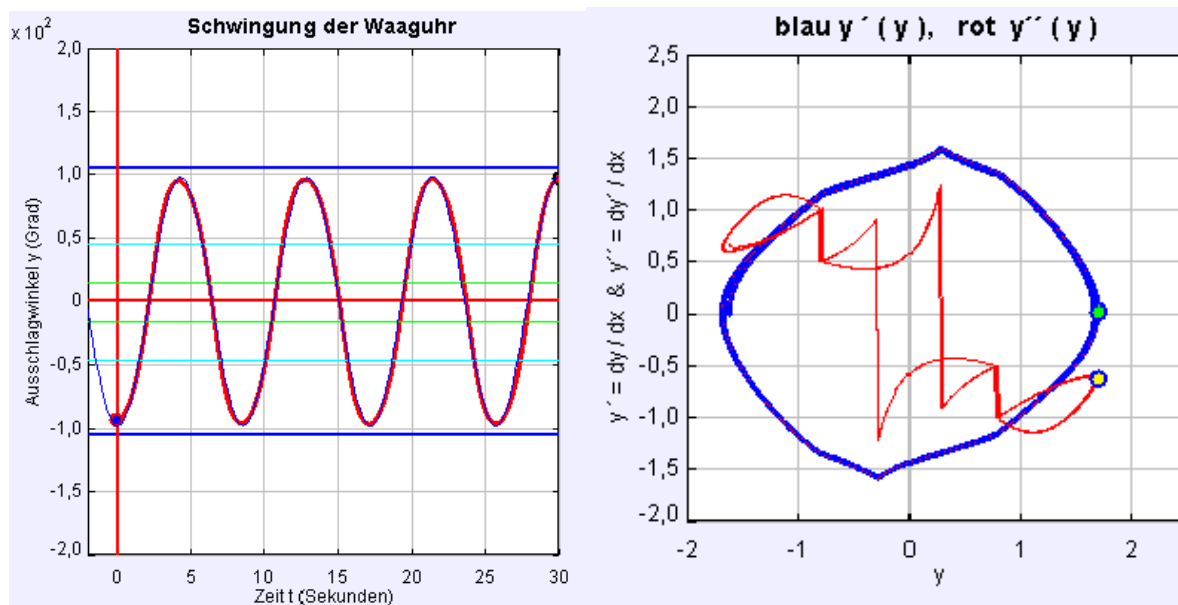
Hier ist ein Lauf mit $R = 0,6$ gerechnet, der nahezu vom stabilen Amplitudenwert ausgeht.

Ihm ist blau eine Cosinusfunktion überlagert, die nach Amplitude, Frequenz und Phase mit Hilfe der Schieber angepasst wurde.

Im eingeschwungenen Zustand ist die Waagschwingung im linken Bild von der eines harmonischen Oszillators, also auch eines Pendels mit kleinem Ausschlag visuell kaum zu unterscheiden, obwohl es sich hier um sehr große Ausschläge handelt.

Die zugehörigen Phasendiagramme rechts zeigen den eingeschwungenen Zustand

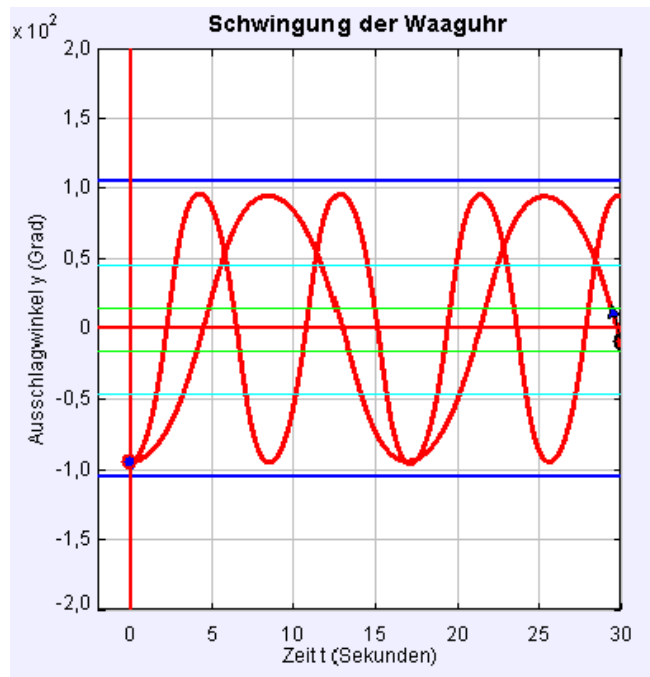
Die Kurve der zweiten Ableitung (Winkelbeschleunigung) ist als vorgegeben stets repetitiv. Sie wird hier mit der Option *Linie* dargestellt, wo man die Sprünge besser im Zusammenhang erkennt.



Es verblüfft zunächst dass sich bei ihren Sprüngen eine schon fast kreisförmige Kurve der Winkelgeschwindigkeit ergibt, und damit eine nahezu sinusförmige Winkelfunktion. Hier muss man daran denken, dass die Sprungzeit sehr klein ist. *Die zweifache Integration bügelt alles glatt.*

Beim Vergleich mit dem Phasendiagramm des freien Pendels sieht man die Analogie des roten Gebildes zu der unter 180 - 45 Grad liegenden Geraden des Pendels

6.4 Einfluss des Antriebs



Die Aufnahme zeigt für $\gamma = 90$ Grad, $d = 0,5$ im eingelaufenen Zustand die Schwingungen für zwei um einen Faktor 4 unterschiedliche Verhältnisse von Antriebsgewicht und Waag- Trägheitsmoment. ($A = 0,25$ und 1); da das Antriebsgewicht selbst konstant gehalten wurde ($G = 1$), bedeutet dies dass die Waagträgheit im einen Lauf um einen Faktor 4 reduziert wurden). Der Reibungskoeffizient R wurde so angepasst ($R = 0,6$ bzw. $0,3$) dass die Amplituden nahezu gleich wurden.

Die Periodendauer ist im einen Fall 8,52 Sekunden, im anderen 16,92 Sekunden. Sie stehen also selbst für diesen riesigen Variationsbereich recht genau im Verhältnis zur Wurzel des Antriebs. Diese Wurzelabhängigkeit wurde im

Experiment mit einer realen Waaguhr auch gemessen, allerdings für viel kleinere Variationsbereiche. Sind die Amplituden ungleich, stimmt die einfache Wurzelabhängigkeit nicht mehr (siehe 7.2)

6.5 Reibung und Temperaturabhängigkeit

Spitzenwerte	
A	A
t=25,331	y= 94,049
t=4,263	y= 96,017
t=12,809	y= 95,846
t=21,374	y= 95,273
t=29,853	y= 94,781

Bei den Experimenten mit einem Waaguhr- Neubau wurde eine sehr gute intrinsische Genauigkeit von wenigen Sekunden pro Tag, aber eine relativ hohe Temperaturabhängigkeit von der Größenordnung 1 Minute pro Grad und Tag gemessen. Die Ursache der Temperatur-Abhängigkeit wurde in der Reibung vermutet, was aber nicht unmittelbar einleuchtet.

Mit der Simulation kann diese Vermutung geprüft werden. Dazu wird der Zeitpunkt der Maxima im eingeschwungenen Zustand für geringfügig unterschiedliche Reibungskoeffizienten R berechnet und im Datenfeld zusammen mit der Spitzenamplitude ausgegeben. Die Zeitwerte dort haben die Genauigkeit der Schrittbreite der Berechnung, also von rund 1/100 Sekunde.

Da Antrieb A und Gewicht G konstant gehalten wurden, wirkt sich eine Erhöhung des Reibungskoeffizienten in einer Verringerung des Ausschlags y und der Periodendauer $t_i - t_{i-1}$ aus

Die folgenden Zahlen geben Messdaten für einen Unterschied der Reibungskoeffizienten von 0,04 (6,2%). Er führt zu einem Unterschied in den Perioden von -0,24 Sekunden (-2,9%), was zu einer täglichen Abweichung von 42 Minuten führen würde. Es genügt also ein Unterschied im Reibungskoeffizienten von 0,000329/Grad um die experimentell beobachtete Abhängigkeit von 1 Minute/Grad und Tag zu erhalten. Dieser Wert liegt im Bereich der Viskositäts - Temperaturabhängigkeit gebräuchlicher Schmiermittel¹¹. Damit erscheint die Temperaturabhängigkeit der Waaghemmung hinreichend begründet.

R=0,61		R=0,65	
t=4,263	y= 96,017	t=4,206	y= 93,100
t=12,809	y= 95,846	t=12,512	y= 92,176
t=21,374	y= 95,273	t=20,761	y= 92,047
t=29,853	y= 94,781	t=29,000	y= 92,169

Periode = 8,479 sec 8,329 sec

$R = 0,61 \rightarrow \text{Periode (sec)} = 8,479$

$R = 0,65 \rightarrow \text{Periode (sec)} = 8,239$

$$\frac{\Delta P}{\Delta R} = \frac{0,240}{0,04} = -6$$

$$\text{tägliche Differenz} = -6 * \frac{24 * 3600}{8,479} * \Delta R = -61139 [\text{sec}] \Delta R = -2547 [\text{min}] * \Delta R$$

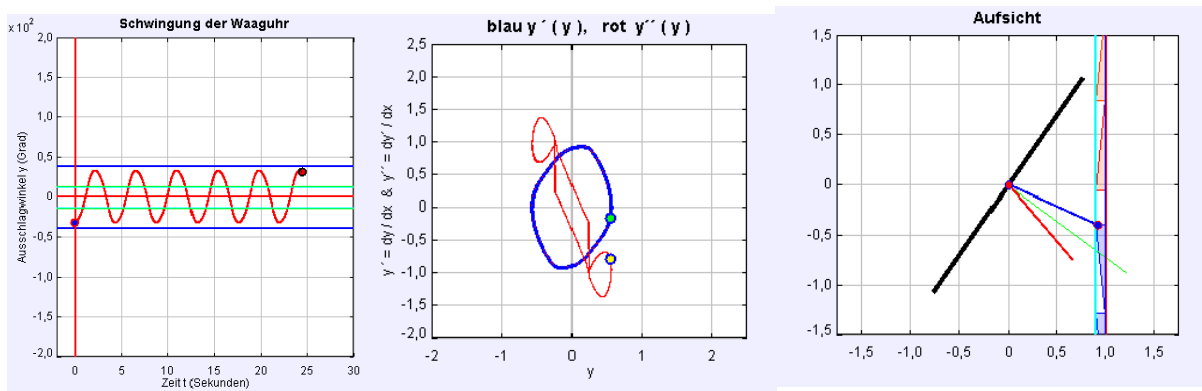
$$\Delta R = 0,00039 \rightarrow \text{tägliche Differenz} = 1 \text{ Minute}$$

Nach dem grundsätzlichen Verständnis bietet es sich an den Zusammenhang eingehender zu untersuchen.

6.6 Extreme Einstellungen

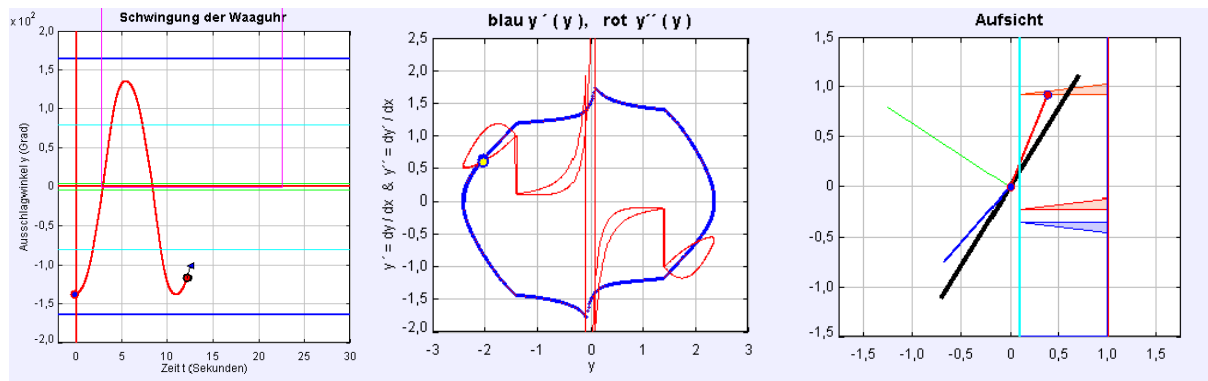
Die theoretische Beschreibung mit ihrer Simulation erlaubt es den Zeitablauf bei Einstellungen zu studieren, die in der Praxis aus technischen oder aus Toleranzgründen kaum oder gar nicht realisierbar sind

Das erste Bild zeigt einen sehr flachen Eingriff mit $d = 0,9$. Der hier gewählte Palettenwinkel war $\gamma = 25$ Grad. Der maximale Ausschlag liegt bei ± 38 Grad und wird mit der gewählten Reibung fast erreicht.

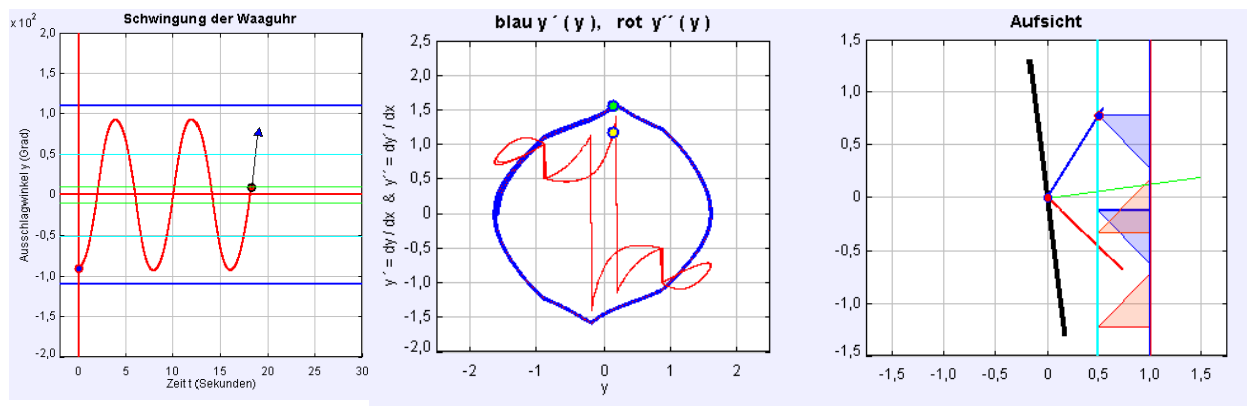


¹¹ Siehe z.B. https://www.uni-kassel.de/fb14/geohydraulik/Lehre/Hydraulik/skript/TH_Kap_1.pdf

Das nächste Bild zeigt einen sehr tiefen Engriff mit $d = 0,1$. Der maximale Palettenwinkel ist ± 164 Grad, der maximale Ausschlag mit der gewählten Reibung ± 130 Grad. Beim Phasendiagramm ist gegenüber den anderen Bildern die Abszisse erweitert.

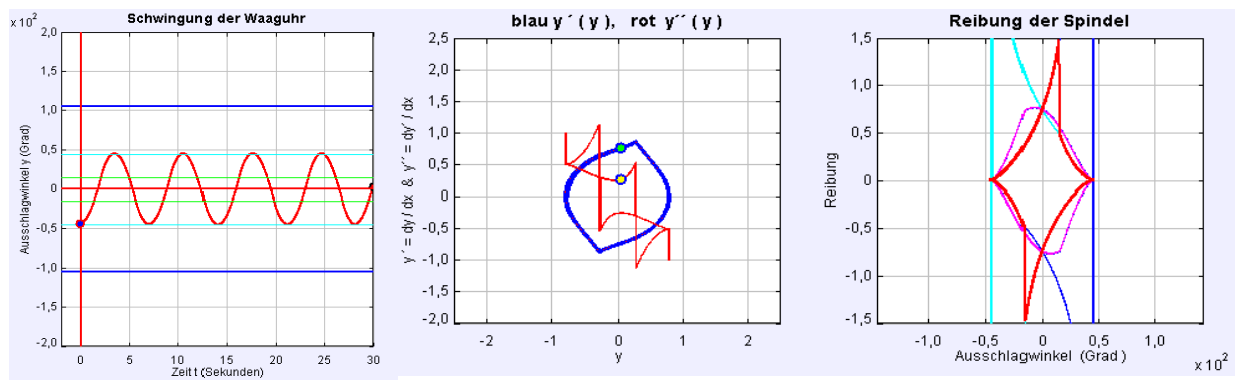


Das dritte Bild zeigt zum Vergleich eine der Praxis nahekommende Einstellung mit einem Palettenwinkel von 100 Grad und einem Eingriff $d = 0,5$. Der maximale Ausschlagwinkel wäre ± 111 Grad; eingestellt werden mit der gewählten Reibung ± 92 Grad.



Die Phasendiagramme veranschaulichen die unterschiedlichen Winkelbereiche der Beschleunigung mit Zahns Spitze (innerhalb des äußeren Sprungs liegender Bereich) und Zahnflanke (außerhalb liegender Bereich).

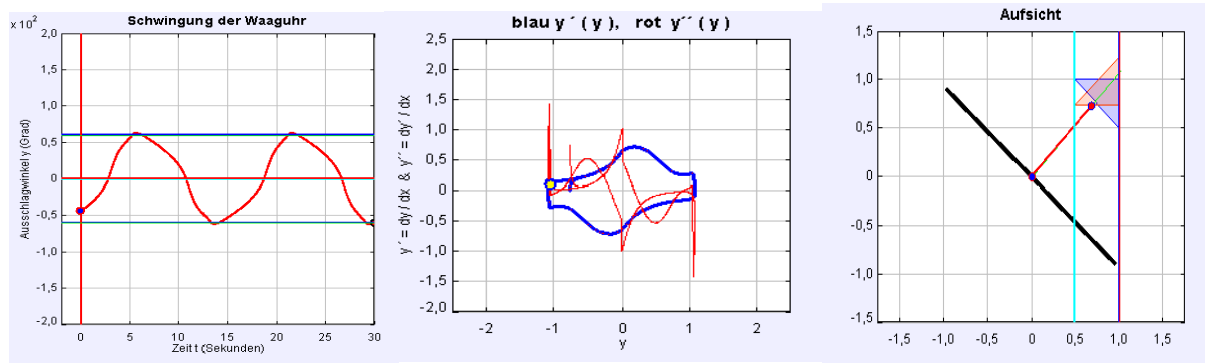
Das nächste Bild zeigt eine Einstellung, bei der mit genügend hoher Reibung $R = 2$ die Waag auf einen Ausschlag von 44 Grad einschwingt. Bei einem Palettenwinkel von 90 Grad bedeutet das, dass kein Wechsel von Zahnflanke auf Zahns Spitze mehr stattfindet (die Maxima berühren die cyanfarbene Grenzlinie). Die Hemmung wird nur über die Zahns Spitzen angetrieben. Das dürfte die Einstellung bei manchem Ausstellungsstück sein, das im *Fall* mit geringem Ausschlag vor sich hin rattert, aber nicht voll durchschwingt.



Am Reibungsdiagramm sieht man, dass der Ast mit Reibung an der Zahnflanke fehlt.

Eine ganz extreme, in der Realität nicht mögliche Einstellung zeigt das nächste Bild. Hier ist der Palettenwinkel $\gamma = 0$, $d = 0,5$. In der Ansicht von oben (rechtes Bild) fallen also beide Paletten zusammen. Die Reibung ist sehr hoch gewählt. Um den Ausschlag zu begrenzen.

In der rechnerischen Grenzeinstellung können die Paletten gerade über die Zahnrückten gleiten. Dies ist in der Simulation sehr schön zu sehen.



In Wirklichkeit würde eine solche Einstellung klemmen, weil Toleranzen in der Herstellung erzwingen würden, dass entweder die eine oder die andere Palette den entsprechenden Zahn fängt oder das Kronrad „durchdreht“. Die Simulation veranschaulicht in ihrer Dynamik warum unter Berücksichtigung von Toleranzen der Palettenwinkel und der Fall endlich sein müssen. Erst dies erlaubt das Durchschlüpfen des freigegebenen Zahns bei gleichzeitiger Hemmung.

7 Simulationen für $\gamma = 90$ Grad

In der Praxis beträgt der Palettenwinkel 90 Grad oder etwas mehr. Mit dieser Einstellung werden nun mehrere Fälle untersucht.

Dabei wird der Einfluss der Reibung durch das auf die Periodenlänge normierte Integral über den zeit- und einstellungabhängigen Reibungsverlauf berücksichtigt. Die Daten dazu werden vom Programm durch Integration über die zeitabhängige Reibung erzeugt und im Datenfenster angezeigt. Das zeitabhängige Integral selbst kann man im Hauptfenster und im Reibungsfenster sehen

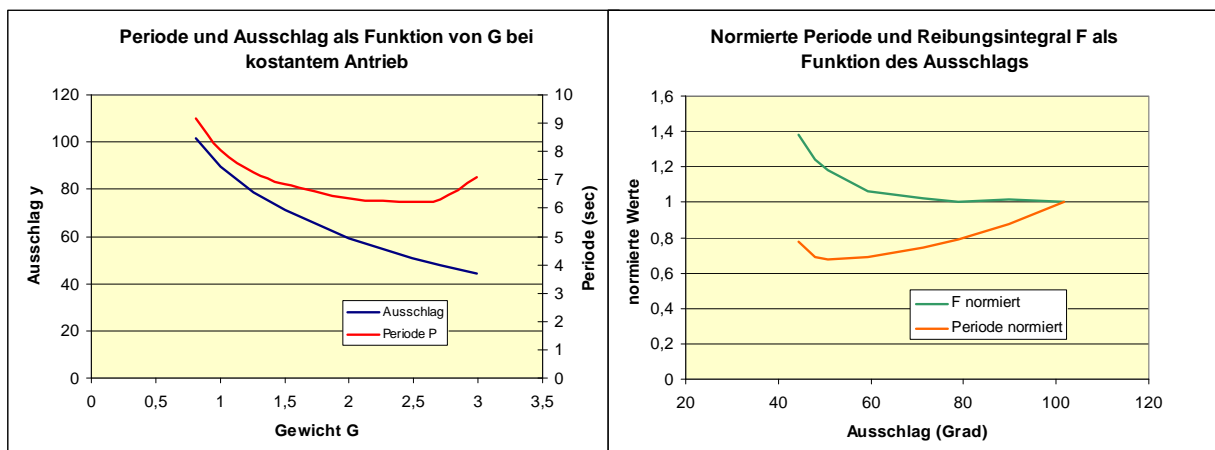
$$F = 2 \int_0^{T/2} R(t) dt .$$

Die numerische Integration beginnt in einem Minimum der Schwingung und erstreckt sich über die ansteigende Halbwelle bis zum nächsten Maximum. aus dem Datenfenster. F entspricht der mittleren Reibung pro Periode. T ist der halbe Abstand zweier Zeitdaten von Maxima im Datenfenster. Die mittlere Reibung pro Zeiteinheit ist FT .

7.1 Einfluss des Antriebsgewichts G

Für diese Simulation werden A als Verhältnis von Antriebsgewicht zu Waag-Trägheitsmoment und der Reibungskoeffizient R konstant gehalten und das Antriebsgewicht G verändert. Das bedeutet, dass das Trägheitsmoment durch Verschieben der Waaggewichte gleichlaufend mit G angepasst wird. Übrig bleibt der Einfluss des Gewichts G auf die Reibung über den Anpressdruck der Paletten. Der Reibungskoeffizient wird mit $R = 0,83$ so eingestellt, dass der Ausschlag bei $G = 1$ rund 80 Grad ist.

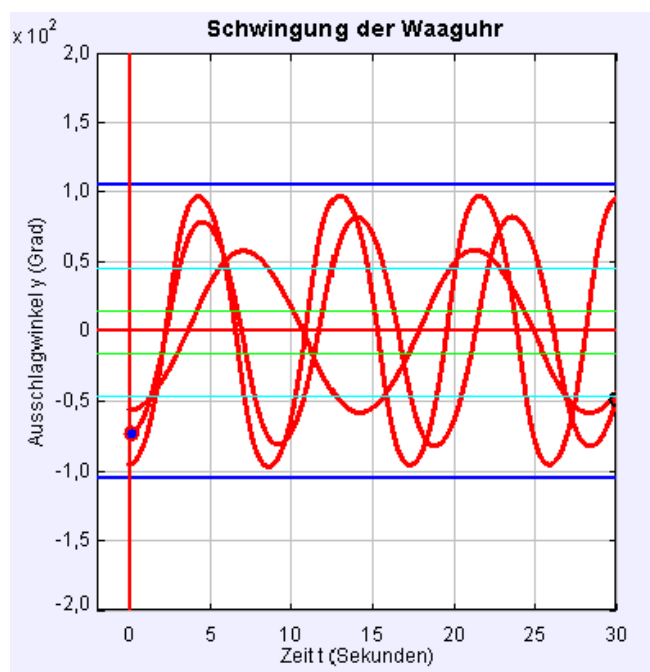
Die linke Graphik zeigt Ausschlag und Periode als Funktion des Gewichts. Erwartungsgemäß wird der Ausschlag mit zunehmendem Gewicht, also mit zunehmender Reibung, kleiner. Die Schwingungsperiode nimmt mit zunehmendem Gewicht ab, die Uhr geht trotz höherer Reibung bei abnehmendem Ausschlag schneller. Allerdings flacht sich dies bei hohem Gewicht ab da die Winkelanteile mit hoher Reibung kleiner werden. Dies sieht man im rechten Bild anhand der Abhängigkeit des Reibungsintegrals vom Ausschlag. Man sieht hier ferner wie die Periode mit dem Ausschlag zusammenhängt. Auch hier kommt es bei kleinen Ausschlägen zu einer Umkehr.



Die Zusammenhänge sind wegen der mehrfachen Abhängigkeit von Ausschlag, Periode und Reibung recht kompliziert.

Man könnte zunächst annehmen, dass sich aus dem Abflachen der Kurven Einstellungen ablesen lassen, bei denen der Einfluss der Reibung und damit die Temperaturabhängigkeit der Uhr relativ gering sind. Das ist aber nicht der Fall, da nicht die mit G verknüpfte absolute Höhe der Reibung die Temperaturabhängigkeit bedingt, sondern die des Reibungskoeffizienten R , der die temperaturabhängigen Oberflächeneigenschaften der aneinander vorbeigleitenden Teile charakterisiert, also z.B. deren Schmierung.

7.2 Einfluss des Antriebs A

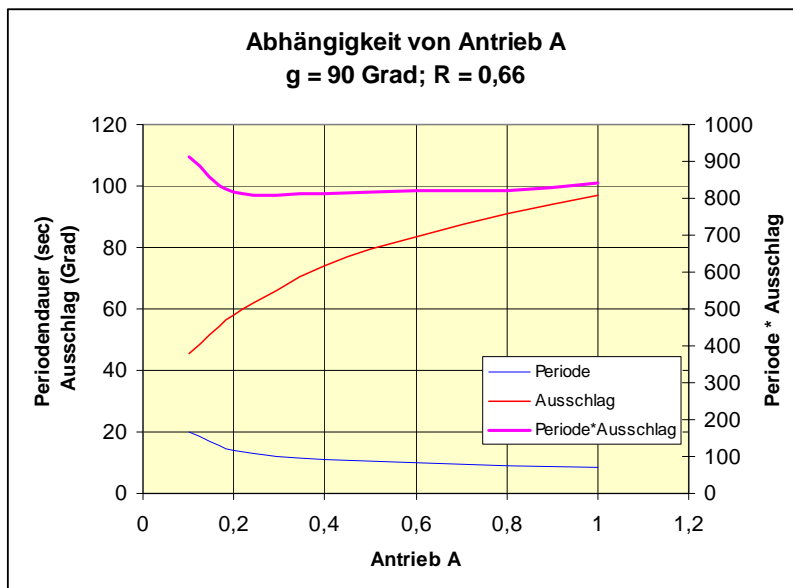


Im folgenden Beispiel wird das Gewicht konstant gehalten $G = 1$ und der Antrieb A , also das Verhältnis von Gewicht zu Trägheitsmoment der Waag variiert. Der Reibungskoeffizient R ist konstant $R = 0,66$.

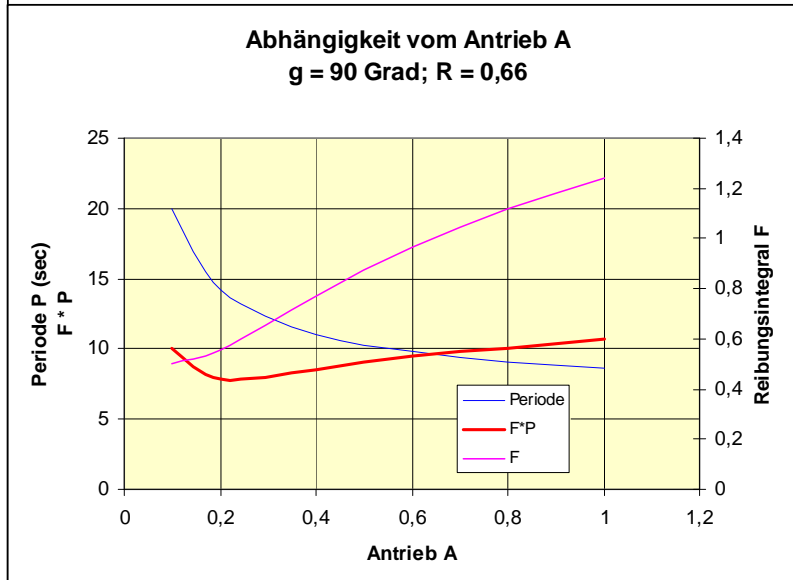
Das Bild zeigt die Schwingungen für $A = 0,2$; $0,6$; $1,0$, jeweils im eingeschwungenen Zustand.

Man sieht, wie mit zunehmendem Antrieb die Periode kleiner und die Amplitude größer wird.

Zur genaueren Auswertung werden für 8 Werte von A die Zahlen des Datenfensters ausgewertet und daraus in den beiden folgenden Diagrammen Relationen gebildet.



Im ersten Diagramm sind über dem Antrieb Ausschlag und Periodendauer aufgetragen (linke Skala). Man sieht wie sich beide gegenläufig entwickeln. Ihr Produkt (dicke magentafarbene Linie - rechte Skala) ist nahezu konstant.



Das nächste Diagramm zeigt über dem Antrieb die Periode in größerem Maßstab (linke Skala) und das Reibungsintegral F (rechte Skala).

Das Reibungsintegral erstreckt sich über die Dauer einer Periode. Die aussagekräftige Relation ist daher das Produkt aus Reibungsintegral und Periode, entsprechend der Reibung in einer Zeiteinheit. (dicke rote Linie). Es ist nahezu

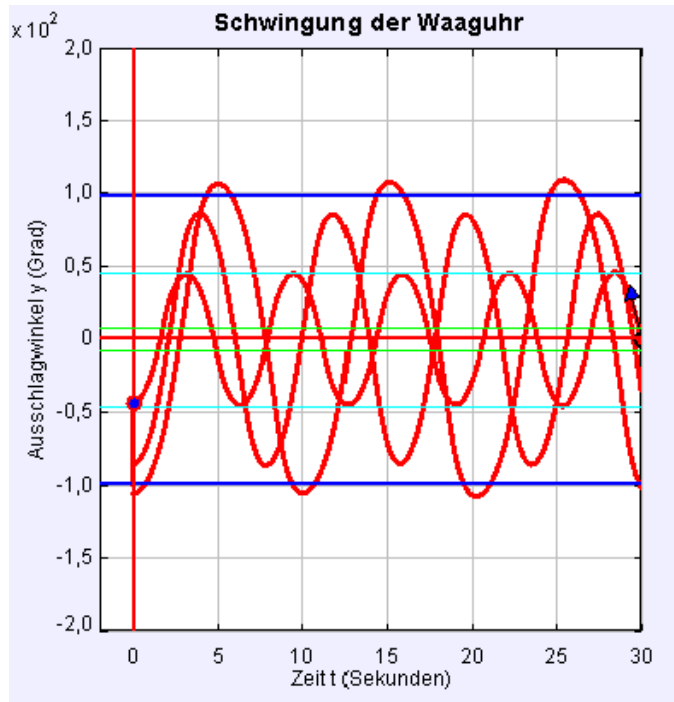
konstant. Die geringe Veränderung rührt daher, dass sich bei kleinem Antrieb und damit geringer werdendem Ausschlag die Anteile der verschiedenen Reibungsphasen verändern.

Zur Anwendung dieser Ergebnisse auf reale Verhältnisse ist zu bedenken, dass der Bereich der Veränderungen im theoretischen Modell weit über den hinausgeht, den man an einer realen Hemmung zur Einstellung verwenden wird. Die Aussage, dass bei alleiniger Veränderung von A die gemittelte Reibung pro Zeiteinheit oder das Produkt aus Periode und Ausschlag nahezu konstant ist, sollte daher die realen Verhältnisse gut beschreiben.

Zu bedenken ist auch, dass z.B. Erschütterungen zu Verlagerungen der Kontaktflächen führen können, was bei nichtglatten Flächen zu Sprüngen des Reibungskoeffizienten führen kann.

7.3 Einfluss der Eingriffstiefe d/L

Im letzten Beispiel dieser Reihe wird der Antrieb $A = 1$ und das Gewicht $G = 1$ konstant gehalten und der Eingriff d/L variiert.

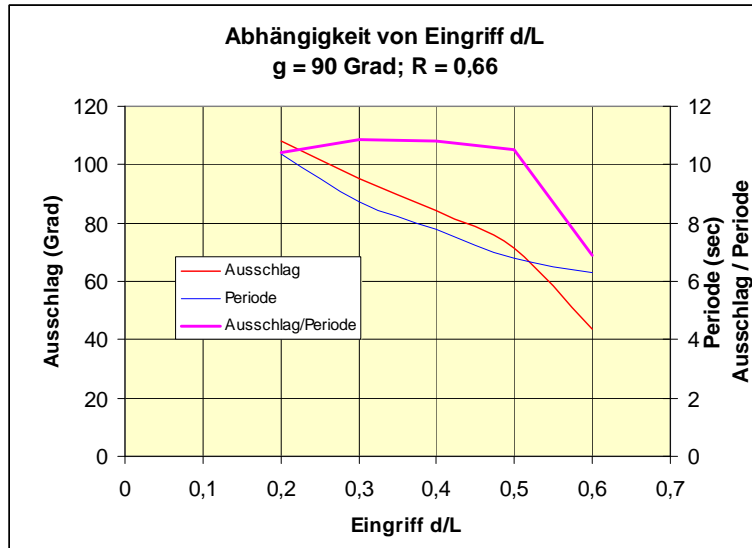


Das Bild zeigt die Schwingungen für $d/L = 0,2; 0,4; 0,6$.

Die eingezeichneten Grenzl意思 treffen für den höchsten Wert $0,6$ zu.

Die Grenze des Hemmungsverlusts liegt für $\gamma = 90$ Grad bei $d/L = 0,7$.

Mit tiefer werdendem Eingriff wächst die Periodendauer und der Ausschlag nimmt zu.



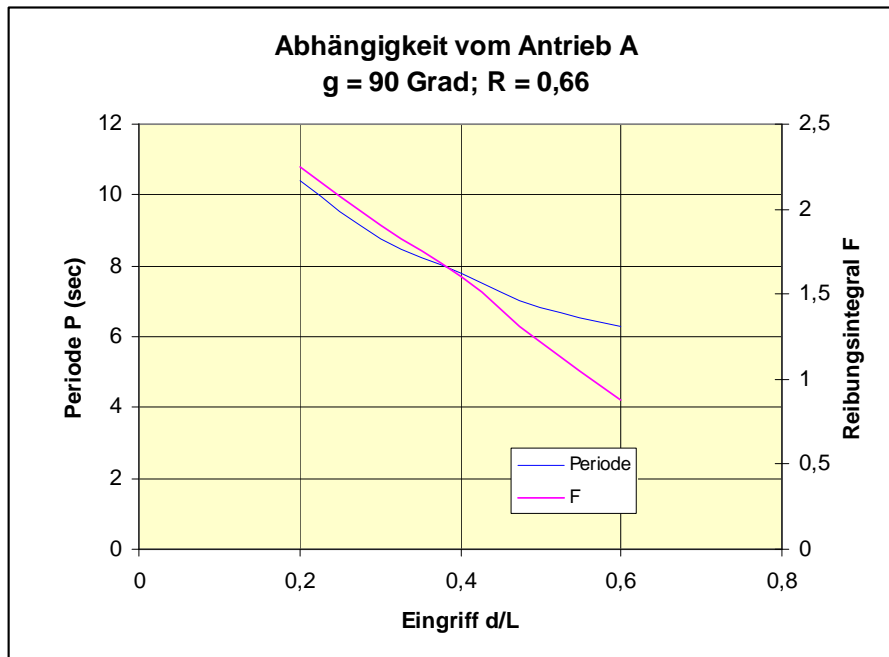
Die nächste Graphik zeigt die Zusammenhänge für Einstellungen von $d/L = 0,2$ bis $0,6$.

Periode und Ausschlag nehmen gleichlaufend mit abnehmender Eingriffstiefe ab. Dementsprechend ist das **Verhältnis beider Größen über einen großen Bereich nahezu konstant**.

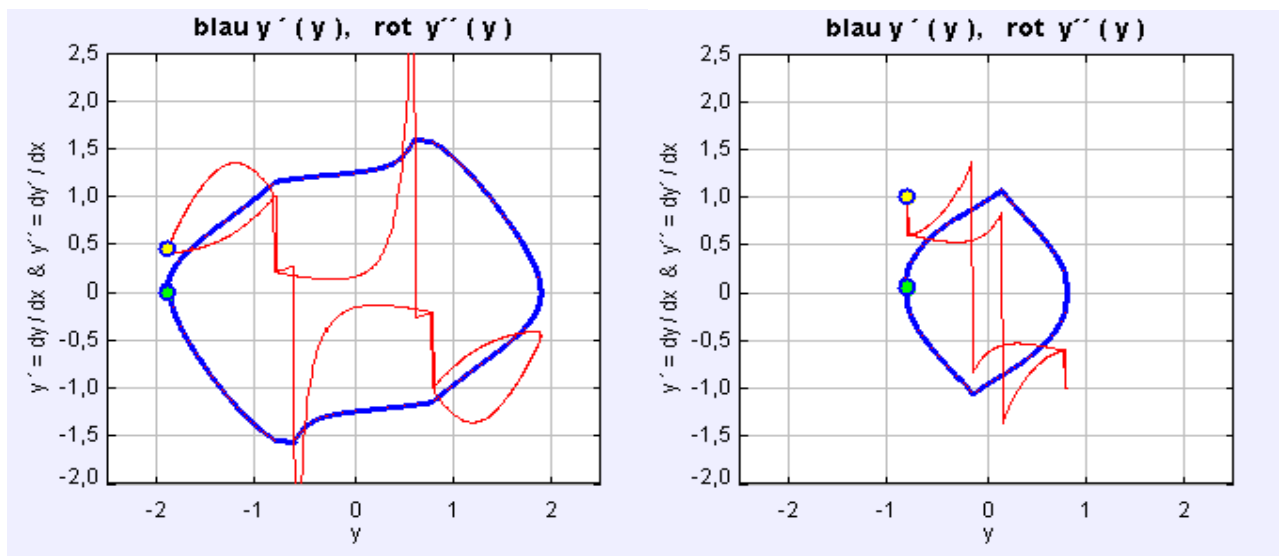
Beim Einjustieren ist der Ausschlag also ein gutes Maß für die Eingriffstiefe, die schwerer genau zu messen ist.

Das Reibungsintegral (nächstes Bild) nimmt jetzt fast gleichlaufend mit der Periode ab; es gibt also kein nahezu konstantes Verhältnis der beiden Größen wie im vorhergehenden Fall.

Der Unterschied ist folgendermaßen zu begründen: Mit abnehmendem Eingriff (zunehmendem d/L) wird der Zeitverlauf der Reibung auf den Flanken eingeschränkt. Tatsächlich ist bei dem Lauf mit $d/L = 0,6$ nur noch der Antrieb über die Zahnsitzen aktiv. Beim vorherigen Lauf war d/L und damit der Reibungsverlauf konstant.



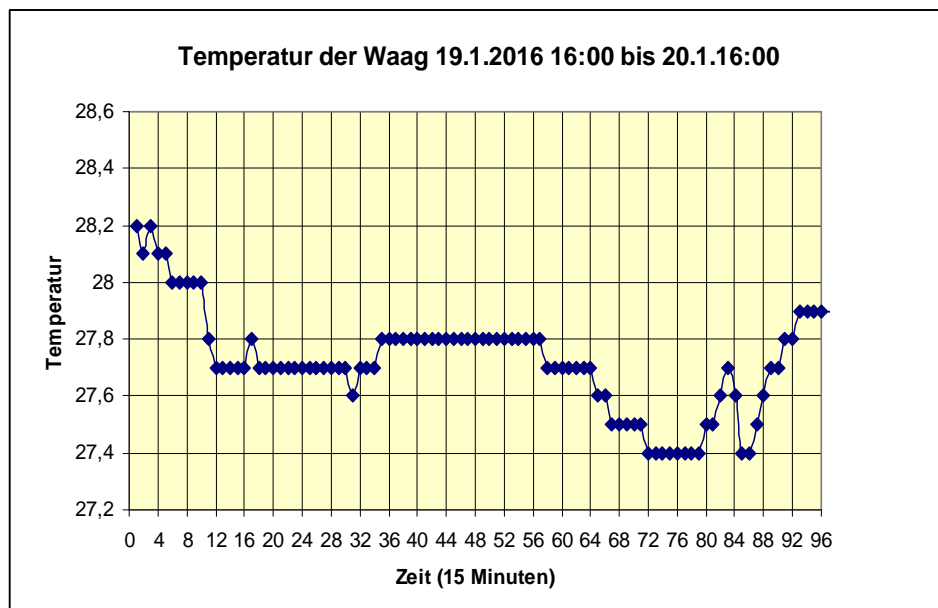
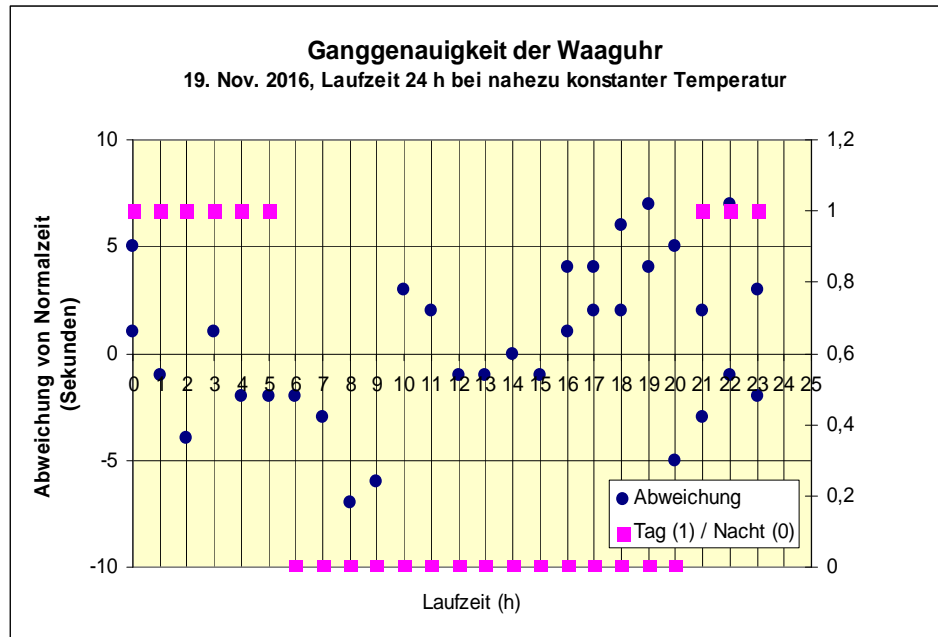
Das wird an den beiden folgenden Phasendiagrammen deutlich. Das linke Bild zeigt den Ablauf bei $d/L = 0,2$, das recht den bei $d = 0,6$.



Finis

Addendum: aktuelles Messergebnis am Waaguhr- Neubau

Einstellung $\gamma \sim 100$ Grad; $d/L \sim 0,5$; Ausschlag ± 85 Grad; $G = 2$ kg; Periode 8,37 sec



Die beiden Diagramme zeigen aktuelle Messergebnisse an dem Neubau einer großen Waaguhr für einen 24-Stunden-Lauf, in dem zufällig die Temperaturschwankungen sehr klein waren.

Das erste Bild zeigt in den blauen Punkten die absoluten Abweichungen von der Normalzeit pro Stunde. Das Messsignal wird dabei von einem Hebel am Bodenrad ausgelöst und mit einer elektronischen Uhr auf dem PC mit einer Auflösung von 1 Sekunde aufgezeichnet. Die mittlere quadratische Schwankung der Stundenanzeige betrug 3,0 Sekunden, die aufsummierte Abweichung nach 24 Stunden blieb innerhalb dieser Schwankungsbreite. Die magentafarbenen Punkte markieren Tag- und Nachtstunden.

Das zweite Bild zeigt den gleichzeitigen Temperaturverlauf in unmittelbarer Nähe zum Kronrad, aufgezeichnet mit einem Datalogger bei einer Auflösung von 1/10 Grad Celsius. In den 24 Stunden Messzeit war die Temperatur auf $\pm 0,2$ Grad konstant, mit sehr geringer Drift.